Münster i. W. 1927 No 10

Phil. Dis

Mathematik

Darstellung der Summation analytischer Funktionen mit Beispielen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster i. W.

vorgelegt von

Amalie Klawitter
aus Steele (Ruhr).

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig
1927

Dekan: Professor Dr. Benecke.
Referent: Privatdozent Dr. Krafft.
Korreferent: Professor Dr. König.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Mai 1926.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Meinen Eltern gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Inhaltsverzeichnis V

I. Einleitung 1

II. Darstellung der Summation analytischer Funktionen.

§ 1. Die Integraldarstellung 3

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta} \quad \ldots\ldots \text{Satz I} \quad 9$$

§ 2. Der Hadamardsche Satz . . . . . Satz II 11

Das Hadamardsche Integral . . . . . Satz III 17

$$J(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

§ 3. Zusammenhang der Integraldarstellung (§ 1) mit den Summierungsverfahren. Einordnung der Perronschen Verfahren in die Integraldarstellung . . . . . Satz IV 20

III. Beispiele zur Summation analytischer Funktionen.

§ 4. Verallgemeinerungen des Eulerschen Verfahrens . . Satz V 28

1. Das Eulersche Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}. \quad 29$$

2. Das verallgemeinerte Eulersche Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta+(q-1)}{q}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}, \quad 31$$

insbesondere für $q=2^p$

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta+2^p-1}{2^p}\right)^{\lambda}}{1-\zeta} \quad \ldots\ldots \text{Satz VI} \quad 32$$

3. Das Verfahren mit Seite

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta^2+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz VII } 36$$

4. Das Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta^3+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}, \quad 37$$

allgemein mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta^n+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz VIII } 40$$

5. Das Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta(\zeta^2+1)}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz IX } 43$$

§ 5. Verallgemeinerungen des Borelschen Verfahrens . . Satz X 44

6. Das Borelsche Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\zeta e^{(\zeta-1)\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz XI } 48$$

7. Das Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\zeta e^{(\zeta^2-1)\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz XII } 50$$

Ein allgemeiner Satz über den Konvergenzbereich. Satz XIII 51

8. Das Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\zeta e^{(\zeta^3-1)\lambda}}{1-\zeta}, \quad 52$$

allgemein mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\zeta e^{(\zeta^n-1)\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz XIV } 54$$

§ 6. Summation durch arithmetische Mittel, Verallgemeinerungen.

9. Das Verfahren mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}-\frac{\zeta}{\lambda}\frac{1-\zeta^{\lambda}}{(1-\zeta)^2} \quad \text{Satz XV } 57$$

10. Das Verfahren der arithmetischen Mittel I. Ordnung des Eulerschen Verfahrens mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}-\frac{1+\zeta}{\lambda}\cdot\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta} \quad \text{Satz XVI } 60$$

Seite

11. Das Verfahren der arithmetischen Mittel II. Ordnung mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}-\frac{\zeta}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1}{\nu}\cdot\frac{1-\zeta^{\nu}}{(1-\zeta)^{2}} \quad \text{. Satz XVII } 61$$

12. Das Verfahren der arithmetischen Mittel I. Ordnung mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1-\zeta^{\nu}}{1-\zeta} \quad \text{. . . . . Satz XVIII } 63$$

13. Das Verfahren der arithmetischen Mittel des Eulerschen Verfahrens mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu+1}}{1-\zeta} \quad \text{. . Satz XIX } 64$$

14. Das Verfahren der arithmetischen Mittel des Borelschen Verfahrens mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1-e^{(\zeta-1)\nu}}{1-\zeta} \quad \text{. . . . Satz XX } 65$$

Ein allgemeiner Satz über die arithmetischen Mittel der mit

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-g(\zeta)\,h(\zeta)^{\lambda}}{1-\zeta}$$

abgeleiteten Verfahren . . . . . Satz XXI 66

Literaturverzeichnis 67

Einleitung.

Um das Rechnen mit divergenten Reihen zu ermöglichen, ist man dazu übergegangen, auch solchen Reihen durch besondere Festsetzungen eine Zahl s als „Summe“ zuzuordnen. Dies geschieht dadurch, daß man aus den Gliedern a_ν der eventuell divergenten Reihe $\sum a_\nu$ mit den Teilsummen s_n nach besonderen Vorschriften eine Zahlenfolge s'_n bildet. Existiert

$$\lim_{n\to\infty} s'_n = s,$$

so nennt man s die durch das zugrunde gelegte Verfahren der Reihe zugeordnete Summe. Diese hängt im allgemeinen wesentlich vom Verfahren ab. Man beschränkt sich zweckmäßig auf solche Verfahren, bei deren Anwendung auf konvergente Reihen der Summenwert s mit dem Konvergenzwert übereinstimmt.

Unter den Summationsverfahren zeichnen sich nun eine ganze Reihe dadurch aus, daß sie Potenzreihen „richtig“ summieren, d. h. daß das Verfahren die Potenzreihe, soweit es sie außerhalb ihres Konvergenzkreises summiert, mit dem Wert summiert, der durch direkte analytische Fortsetzung der Potenzreihe erhalten wird. Diese Summationsverfahren können also zur analytischen Fortsetzung von Potenzreihen dienen. Alle näher studierten Summationsverfahren gehören hierher. Sie entspringen alle aus einer einfachen Integralformel[1]), die auch noch zahlreiche andere Verfahren zur Summation liefert.

---

[1]) Zuerst eingeführt von M. Krafft, Vorlesung über „divergente Reihen“, Münster S.-S. 1925.

Anschließend an eine Vorlesung über „divergente Reihen“ von Herrn Privatdozenten Dr. M. Krafft im S.-S. 1925 stellte mir Herr Prof. Dr. R. König die Untersuchung einiger solcher Verfahren zunächst als Staatsexamensarbeit. Diese erweiterte ich auf Anregung von Herrn Prof. Dr. König zu vorliegender Dissertation. Ich danke Herrn Prof. Dr. König und Herrn Prof. Dr. Krafft (jetzt in Marburg) für die Anregungen und Ratschläge und das Interesse, wodurch sie meine Arbeit förderten.

Darstellung der Summation analytischer Funktionen.

§ 1.

Eine Integraldarstellung.

Es sei $f(z)$ definiert durch das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty \nu} a_\nu z^\nu. \tag{1}$$

Der Konvergenzkreis der Reihe habe den Radius r, wobei $r > 0$ sein soll. C sei eine geschlossene, den Punkt $\zeta = 0$ umschließende Kurve, die ganz in der von 1 bis ∞ aufgeschlitzten ζ-Ebene verläuft. Ferner wird von C vorausgesetzt, daß jeder Punkt derselben von Null aus strahlig erreicht werden kann. C soll ein für allemal fest gewählt sein. Wir haben in der ζ-Ebene somit etwa Fig. 1, wenn in dieser 1 durch einen positiven echten Bruch ersetzt wird.[2])

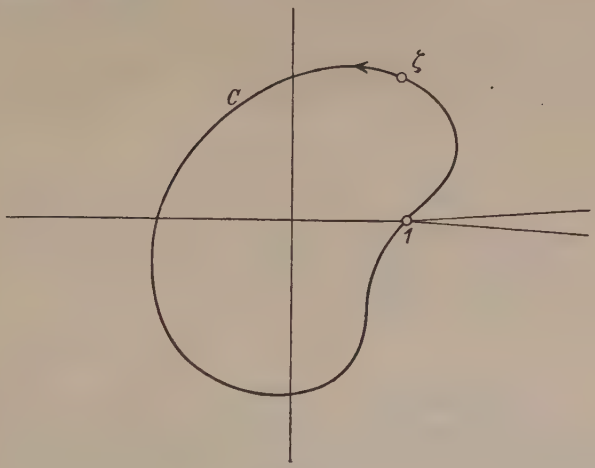

Fig. 1.

[2]) Da im folgenden nur der jetzt ausgeschlossene Grenzfall, daß C durch 1 geht, wichtig ist, sind die meisten Figuren gleich für diesen Grenzfall gezeichnet. Das ist im folgenden stets zu berücksichtigen.

Wir behaupten: Unter den gemachten Voraussetzungen gilt folgende Integraldarstellung:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C\nearrow} f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta}, \tag{2}$$

wenn wir z auf einen gewissen Bereich, der noch später angegeben werden soll, beschränken. Dabei ist das Integral so über C zu erstrecken, daß beim Durchlaufen der Kurve deren Inneres zur Linken bleibt.

Diese Integraldarstellung läßt sich auf die Cauchysche Integralformel

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c\nearrow}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z} \tag{3}$$

zurückführen. Im allgemeinen verhält sich das Cauchysche Integral (3) anders als (2). Während in (2) C unabhängig von $f(z)$ gewählt wird, können durch eine Veränderung der Integrationskurve c des Cauchyschen Integrales singuläre Punkte auf oder in c zu liegen kommen, in welchem Falle (3) nicht mehr gilt. Wir schreiben zunächst für dies Integral (2), das sicher eine Funktion von z ist, $F(z)$. Also

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C\nearrow} f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta}. \tag{4}$$

In der ζ-Ebene zeichnen wir um $\zeta=0$ den größten Kreis, der ganz in C verläuft. Sein Radius sei ϱ.

Für alle ζ auf C ist

$$|\zeta|\geqq\varrho>0, \tag{5}$$

wobei ϱ den Minimalabstand der Kurve C von dem Nullpunkt bedeutet. Der Konvergenzradius von $f(z)$ ist nach Voraussetzung gleich r. Die Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem kleineren Kreise, also sicher im Kreise mit dem Radius $\frac{r}{2}$. Die Reihe

(6) $$f\left(\frac{z}{\zeta}\right)=\sum a_\nu\left(\frac{z}{\zeta}\right)^\nu$$

konvergiert dann absolut und gleichmäßig für

$$\left|\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right| \leqq \frac{r}{2}$$

oder:

$$|z| \leqq \frac{r}{2}|\zeta|$$

und mit Bezug auf (5) für alle

$$|z| \leqq \frac{r}{2}\varrho$$

und alle ζ auf C. Die Reihe (6) darf daher gliedweise integriert werden, und wir erhalten aus (4) jetzt

(7) $$F(z)=\sum a_\nu z^\nu \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nearrow}\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta^{\nu+1}}.$$

Die Zahlen $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nearrow}\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta^{\nu+1}}$ lassen sich angeben; denn ist $\varphi(z)$ eine analytische Funktion, die regulär ist für $z=0$, so ist sie entwickelbar, d. h.

$$\varphi(z)=\sum b_\nu z^\nu;$$

dabei haben die b_ν nach der Cauchyschen Koeffizientenformel den Wert

$$b_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{d\zeta}{\zeta^{\nu+1}}.$$

In unserem Falle ist

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots.$$

Die Taylor-Koeffizienten b_ν unserer Entwicklung haben alle den Wert 1, also ist

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nearrow}\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta^{\nu+1}}=1.$$

Somit erhalten wir für (7) und (4)

$$F(z) = \sum a_\nu' z^\nu = f(z), \tag{8}$$

und zwar gilt dies nach dem vorher Gesagten für alle z, für die $|z| \leqq \frac{r}{2}\varrho$ ist. (2) gilt also sicher für $|z| \leqq \frac{r\varrho}{2}$.

Die Abschätzungen waren sehr roh, statt $\frac{r}{2}$ hätten wir auch nehmen können $\frac{r}{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ beliebig klein und wären dann zu (8) d.h. (2) gekommen für $|z| \leqq \frac{r\varrho}{1+\varepsilon}$, also für $|z| < r\varrho$.

Es wird sich zeigen, daß die Darstellung (2) auch noch für weitere z gilt. Wir zeigen dies durch Zurückführung unseres Integrales (4) auf das Cauchysche Integral, so daß dann für diese z die Darstellung (2) mit der Cauchyschen (3) übereinstimmt, daß also für alle diese z

$$F(z) = f(z)$$

ist.

Wir machen die Substitution

$$\xi = \frac{z}{\zeta}, \text{ oder } \zeta = \frac{z}{\xi}; \tag{9}$$

dabei soll z irgendwie fest gewählt sein. Dadurch wird die ζ-Ebene auf die ξ-Ebene abgebildet. Die Abbildung wird durch Fig. 2 veranschaulicht.

Wenn $\zeta = 1$ ist, sei $\xi = z_1$; für $\arg \zeta = 0$ ist $\arg \xi$ gleich $\arg z_1 - \arg \zeta = \arg z_1$; d. h. liegt ζ auf der reellen Achse, so liegt ξ auf dem Strahl durch Null und z_1. Wenn ζ gegen Unendlich strebt, so muß ξ gegen Null gehen; dem aufgeschlitzten Teil der reellen Achse von 1 bis ∞ entspricht in der ξ-Ebene der Strahl von z_1 bis 0. Den von der Kurve C in der ζ-Ebene umschlossenen Bereich nennen wir $\mathfrak{B}$, das Äußere derselben $\mathfrak{B}^*$. Durch die durch die Gleichungen (9) vermittelte Abbildung wird der Bereich $\mathfrak{B}^*$ auf das Innere der Bildkurve von C, welches wir mit $\mathfrak{B}^{-1}$ bezeichnen wollen, abgebildet. Die Bildkurve von C in der ξ-Ebene bezeichnen wir mit C_z^{-1}; ihr Durch-

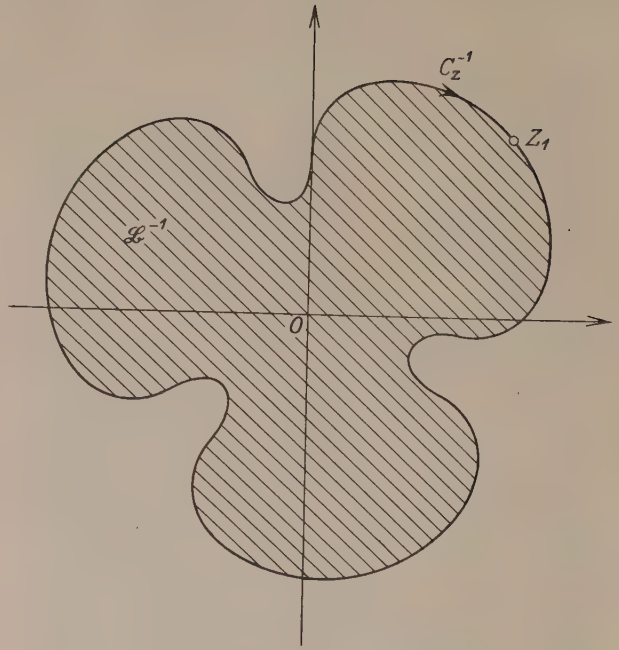

Fig. 2 (ξ-Ebene = z-Ebene).

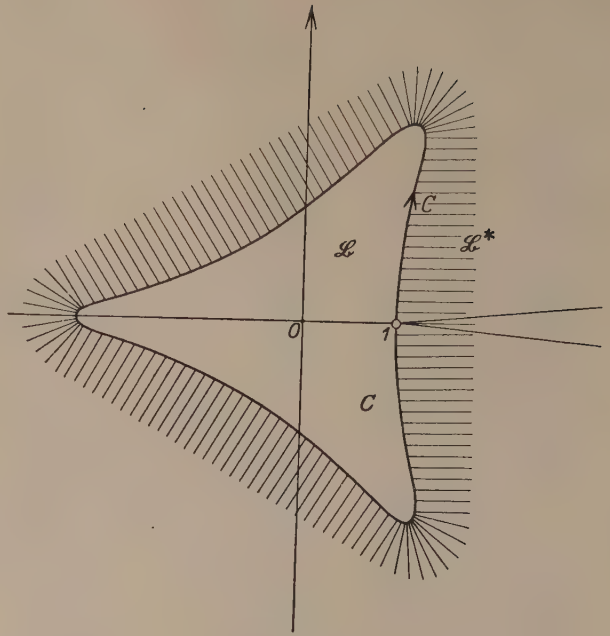

Fig. 2 (ζ-Ebene).

laufungssinn ist dem von C entgegengesetzt. Sie umschließt den Punkt $\xi = 0$. Jeder Strahl durch $\zeta = 0$ wird in einen Strahl durch $\xi = 0$ abgebildet. Hat jeder Strahl in der ζ-Ebene nur einen Punkt mit C gemeinsam, d. h. ist jeder Punkt von C strahlig erreichbar, so gilt dasselbe auch für die Bildkurve. Wir führen die Substitution (9) in unser Integral ein, dann erhalten wir:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C\nearrow} f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta(1-\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z^{-1}\swarrow} f(\xi) \frac{-\frac{z}{\xi^2}\, d\xi}{\frac{z}{\xi}\left(1-\frac{z}{\xi}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_z^{-1}\swarrow} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z^{-1}\nearrow} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}$$

Rechts steht aber das Cauchysche Integral (3), wenn z so gewählt ist, daß innerhalb und auf C_z^{-1} kein singulärer Punkt von $f(z)$ liegt, d. h. alle etwa vorhandenen Singularitäten müssen außerhalb von $\mathfrak{B}^{-1}$, also im Bildbereich von $\mathfrak{B}$ liegen.

Es sei α eine in der ξ-Ebene markierte singuläre Stelle von $f(z)$; in der ζ-Ebene entspricht ihr der Punkt $\zeta_\alpha = \frac{z}{\alpha}$. Soll α nicht innerhalb oder auf C_z^{-1} liegen, so muß ζ_α in $\mathfrak{B}$ liegen. D. h. aber, der Punkt $z = \alpha \cdot \zeta_\alpha$ muß innerhalb des Gebietes liegen, das man erhält durch ähnliche Vergrößeruug von $\mathfrak{B}$ im Verhältnis $1 : |\alpha|$ und Drehung um $\arg \alpha$. Dieses durch Streckung und Drehung aus $\mathfrak{B}$ entstandene Gebiet wollen wir $\alpha \cdot \mathfrak{B}$ nennen. Wird z auf den Bereich $\alpha \cdot \mathfrak{B}$ beschränkt, so nimmt $\xi = \frac{z}{\zeta}$ den Wert α in $\mathfrak{B}^{-1}$ nicht an und liegt auch nicht auf dem von α ausgehenden Strahl des Sternes. Ebenso bilden wir zu jedem singulären Punkt α von $f(z)$ den zugehörigen

Bereich $\alpha \cdot \mathfrak{B}$. Damit $f\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ regulär ist in $\mathfrak{B}^{-1}$, muß z allen $\alpha \cdot \mathfrak{B}$ gleichzeitig, d. h. dem „Durchschnitt" aller Gebiete $\alpha \cdot \mathfrak{B}$ angehören. Für alle z des Durchschnittes, den wir stets mit Γ bezeichnen wollen, ist also $F(z) = f(z)$, d. h. für diese z gilt die Integraldarstellung (2).

Wir fassen das bisher Gesagte zusammen in folgendem

Satz I.

Ist C die früher eingeführte Kurve, und liegt z im Durchschnitt Γ der Gebiete $\alpha \cdot \mathfrak{B}$, die aus einer Drehstreckung um α aus dem von C eingeschlossenen Gebiet $\mathfrak{B}$ entstehen, so gilt für diese z die Gleichung:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(1-\zeta)}$$

bei positiver Integration um C. Dabei durchläuft α alle und nur die durch geradlinige Fortsetzung erreichbaren singulären Punkte von $f(z)$, also die Ecken des Mittag-Lefflerschen Sterns von $f(z)$.

Im folgenden verbinden wir die Integraldarstellung von Satz I noch mit folgendem Grenzübergang: Wir vergrößern C durch Streckung vom Anfangspunkt $\zeta = 0$ aus so lange, bis sie durch $\zeta = 1$ geht. Dieser Streckung von C entspricht eine ähnliche Vergrößerung von $\mathfrak{B}$, aller $\alpha \cdot \mathfrak{B}$ und von Γ im selben Verhältnis. Wir erhalten dann unmittelbar den Zusatz zu Satz I.

Ist C' eine Kurve, die durch $\zeta = 1$ geht und im übrigen die Eigenschaften von C hat, $\mathfrak{B}'$ und Γ' die zu C' ebenso wie $\mathfrak{B}$ und Γ zu C gebildeten Gebiete, dann läßt sich zu jedem abgeschlossenen Teilgebiet von Γ' ein C' ähnliches C so finden, daß für alle z dieses Teilgebietes die Integraldarstellung von Satz I gilt.

Ist der Einheitskreis Teilgebiet von $\mathfrak{B}'$, so enthält der Durchschnitt Γ' den ganzen Konvergenzkreis von (1) im Innern. Das Integral liefert also die analytische Fortsetzung des durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum a_\nu z^\nu$$

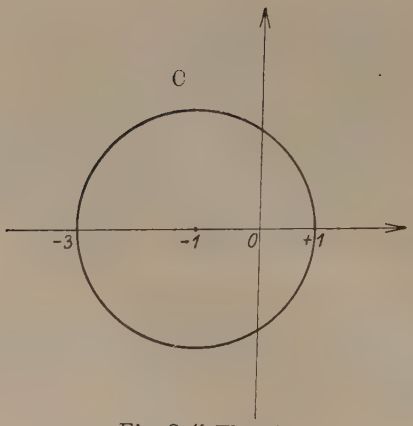

Fig. 3 (ζ-Ebene).

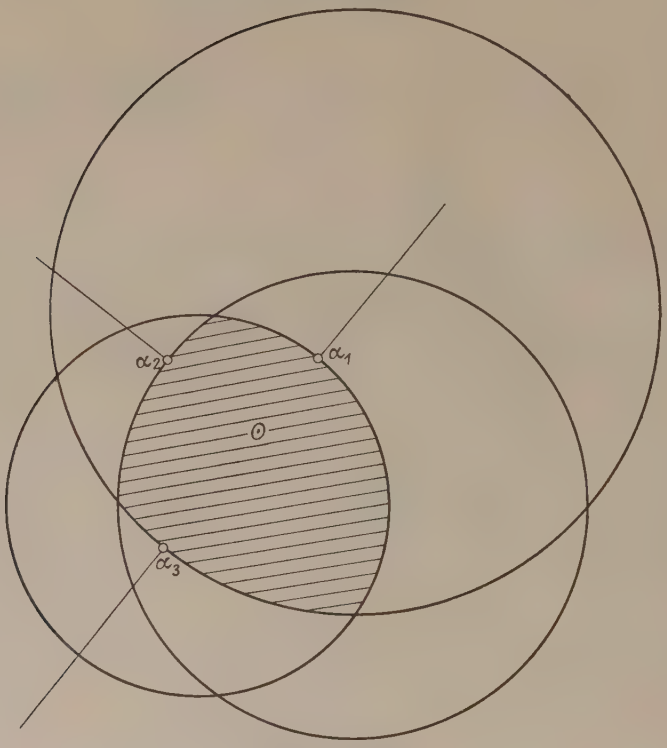

Fig. 3 (z-Ebene).

definierten Funktionselementes in die Punkte von Γ', für die $|z| > r$ ist. Im allgemeinen wird das Durchschnittsgebiet teilweise über den Konvergenzkreis des durch die Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ definierten Funktionselementes hinausragen, der durch den nächsten singulären Punkt geht. Sicher ist das der Fall, wenn auf $|z| = r$ nur endlich viele α liegen, und C' bis auf $\zeta = 1$ außerhalb $|\zeta| = 1$ verläuft. Die Bildung eines Durchschnittsgebietes wird durch Fig. 3 veranschaulicht. Die Kurve C' in der ζ-Ebene ist hier der Kreis um -1 als Mittelpunkt mit dem Radius $r = 2$; weiter ist in der Figur angenommen, daß der Mittag-Lefflersche Stern von $f(z)$ drei Ecken α_1, α_2, α_3 besitzt. Der Kreis C' in der ζ-Ebene ist nacheinander um arg α_1, arg α_2, arg α_3 zu drehen und im Verhältnis $1:|\alpha_1|$, $1:|\alpha_2|$, $1:|\alpha_3|$ zu strecken. Dem Punkt 1 in der ζ-Ebene entspricht in der z-Ebene α_1 bzw. α_2 oder α_3. Dem gegenüberliegenden Punkt des Durchmessers -3 entspricht demnach $-3\alpha_1$, bzw. $-3\alpha_2$ oder $-3\alpha_3$. Als Durchschnittsgebiet erhalten wir ein Kreisbogendreieck, wie Fig. 3 zeigt. Der Konvergenzkreis, der durch den Null am nächsten liegenden singulären Punkt geht, ist ganz im Durchschnitt enthalten.

§ 2.

Das Hadamardsche Integral.

Unsere in § 1 abgeleitete Integraldarstellung (2) ist, wie weiterhin gezeigt werden soll, ein spezieller Fall des sogenannten Hadamardschen Satzes von der Multiplikation der Singularitäten.

Wir formulieren den Hadamardschen Satz[3]) wie folgt:

Satz II.

Besitzt die Funktion $f(z)$, die bei $z = 0$ die Entwicklung

$$f(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$$

[3]) Siehe Hadamard, La Série de Taylor, Paris 1901, S. 69—72, und Théorème sur les séries entières, Acta math. 22 (1898); Faber, Bemerkungen zu einem funktionentheoretischen Satz des Herrn Hadamard, Jahresbericht d. dtsch. Math. Vereinigg. 16 (1907).

hat, die singulären Stellen α, und die Funktion $\varphi(z)$, die dort dargestellt ist durch die Entwicklung

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty b_\nu z^\nu,$$

die singulären Stellen β, so hat die Funktion $J(z)$, die definiert ist durch das Funktionselement

$$J(z) = \sum_0^\infty a_\nu b_\nu z^\nu,$$

die Punkte $\alpha \cdot \beta$ zu Sternecken.

Hadamard geht aus von dem Integral

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{10}$$

dabei ist C eine ganz im Stern von $\varphi(\zeta)$ verlaufende, den Nullpunkt umschließende Kurve. Jeder Punkt derselben soll strahlig erreichbar sein.

Bevor der obige Satz bewiesen wird, muß gezeigt werden, daß das Integral (10) existiert und für einen gewissen Bereich von z eine analytische Funktion darstellt.

Man kann gewiß unter den gemachten Voraussetzungen ein endliches Gebiet für z angeben, in dem die Integraldarstellung (10) gilt; denn auf C gibt es ein absolut kleinstes ζ, also ein $\varrho > 0$, für das $|\zeta| \geqq \varrho$ erfüllt ist.

Hat die Potenzreihe

$$f(z) = \sum a_\nu z^\nu$$

den Konvergenzradius r, so ist für sämtliche z, für die $|z| \leqq \frac{r\varrho}{2}$, also für $\left|\frac{z}{\zeta}\right| \leqq \frac{r\varrho}{2|\zeta|} \leqq \frac{r}{2}$, $f\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ regulär. $\sum a_\nu \left(\frac{z}{\zeta}\right)^\nu$ konvergiert absolut und gleichmäßig für alle ζ auf C und alle $|z| \leqq \frac{r\varrho}{2}$.

Deshalb dürfen wir (10) gliedweise integrieren, und wir erhalten:

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \sum a_\nu z^\nu \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{\nu+1}} \tag{11}$$

oder

$$J(z) = \sum a_\nu b_\nu z^\nu, \tag{11'}$$

denn es ist

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{\nu+1}}\, d\zeta.$$

Man kann wie oben zeigen, daß dies sogar gilt für $|z| < r\varrho$. Um zu zeigen, daß die Integraldarstellung (10) bzw. (11) auch noch für einen größeren Bereich gilt, müssen wir beweisen, daß (11) daselbst eine analytische Funktion darstellt, d. h. es muß

$$\left| \frac{J(z+h) - J(z)}{h} - J'(z) \right| < \varepsilon$$

gemacht werden können; dabei ist $|h| < \delta$; das gilt unabhängig von z und ζ für alle z in einem gewissen Bereich Γ.

Für alle z, für die $J(z)$ existiert, existiert auch

$$J^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int f'\left(\frac{z}{\zeta}\right)\varphi(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2};$$

$J^*(z)$ entsteht durch Differentiation nach z unter dem Integralzeichen. Für diese z ist also zu vermuten, daß

$$J^*(z) = \frac{dJ(z)}{dz}$$

ist; um dies zu zeigen, bilden wir:

$$\frac{J(z+h) - J(z)}{h} - J^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\frac{f\left(\frac{z+h}{\zeta}\right) - f\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\frac{h}{\zeta}} - f'\left(\frac{z}{\zeta}\right) \right) \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta$$

$$\left| \frac{J(z+h) - J(z)}{h} - J^*(z) \right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \left| \frac{f\left(\frac{z+h}{\zeta}\right) - f\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\frac{h}{\zeta}} - f'\left(\frac{z}{\zeta}\right) \right| \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta^2|}\, |d\zeta|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi\varrho^2} ML \left| \frac{f\left(\frac{z+h}{\zeta}\right) - f\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\frac{h}{\zeta}} - f'\left(\frac{z}{\zeta}\right) \right|,$$

wobei M das Maximum von $\varphi(\zeta)$ auf C ist, L die Länge von C; für $|\zeta^2|$ ist ϱ^2 gesetzt, was erlaubt ist, da $\varrho \leqq \zeta$ ist. Wenn es gelingt,

$$\left| \frac{f\left(\frac{z+h}{\zeta}\right) - f\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\frac{h}{\zeta}} - f'\left(\frac{z}{\zeta}\right) \right|$$

mit immer kleiner werdendem h beliebig klein zu machen für das gewählte z und a l l e ζ auf C, so ist die Behauptung bewiesen.

Wir setzen

$$\frac{z}{\zeta} = \xi, \quad \frac{h}{\zeta} = k;$$

dann muß für die hierdurch gegebenen ξ

$$\left| \frac{f(\xi+k) - f(\xi)}{k} - f'(\xi) \right| < \varepsilon$$

gemacht werden können.

z ist nur zulässig, wenn für alle ζ auf C stets $f(\xi)$ regulär ist; d. h. für jedes feste z muß das Bild der Kurve C, die selbst ganz im Stern von $\varphi(\zeta)$ liegt, ganz im Stern von $f(\xi)$ liegen. Es ist schon gezeigt, daß es solche z sicherlich gibt. z_1 sei ein solches z und liege auf einem Strahl durch den Nullpunkt der z-Ebene (Fig. 4).

Fig. 4a. $\varphi(\zeta)$-Ebene.

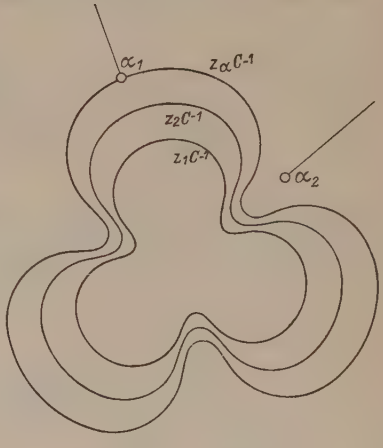

Fig. 4b. $f(\xi)$-Ebene.

Wir haben demnach folgende drei Ebenen zu betrachten: In der $\varphi(\zeta)$-Ebene liegt ganz im Stern von $\varphi(\zeta)$ die Kurve C. Durch die Transformation $\xi = \frac{z}{\zeta}$ wird C auf die ξ-Ebene abgebildet. Durch Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen Achse und weiter durch Drehung um $\arg z_1$ und Streckung um den Betrag von z_1 geht C über in eine Kurve der ξ-Ebene; wir bezeichnen sie mit $z_1 C^{-1}$. Lassen wir nun z auf dem Strahl über z_1 hinaus wandern, so entsprechen allen weiteren Punkten z_2, $z_3 \ldots$ in der ξ-Ebene je eine Kurve $z_2 C^{-1}$, $z_3 C^{-1} \ldots$, die alle zur ersten $z_1 C^{-1}$ ähnlich sind. Wir können auf dem Strahl $0\, z_1$

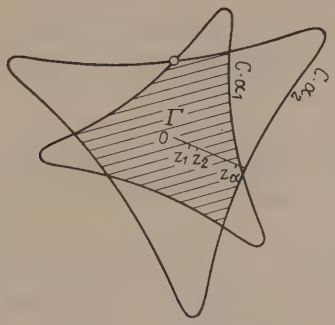

Fig. 4c. $f(z)$-Ebene.

über z_1 hinaus so lange für weitere z die entsprechende Kurve in der ξ-Ebene zeichnen, bis dieselbe durch eine Sternecke α geht. Das zugehörige z in der z-Ebene sei z_α. Zu jedem weiteren z, das auf dem Strahl über z_α hinaus liegt, gehört in der ξ-Ebene eine Kurve, die den singulären Punkt α einschließt; $f\left(\frac{z}{\zeta}\right)$ ist dann nicht mehr regulär. So gelangen wir auf jedem Strahl durch Null zu einem Endpunkt z_α, für den also die zugehörige Kurve der $f(\xi)$-Ebene durch die Sternecke α geht. Alle Endpunkte z_α zusammen bilden eine Kurve. Zu jedem z_α auf dieser Kurve läßt sich ein ζ_α auf C angeben derart, daß $\alpha = \frac{z_\alpha}{\zeta_\alpha}$ oder $z_\alpha = \alpha \cdot \zeta_\alpha$ ist.

Umgekehrt gehört zu jedem ζ ein z_α. Wenn also ζ die ganze Kurve C durchläuft, durchläuft z_α die ganze Grenzkurve. Die Gesamtheit der Punkte z_α erhält man also aus den Punkten von C durch die Transformation $z_\alpha = \alpha \cdot \zeta$, d. h. man hat C um das Argument von α zu drehen und im Verhältnis $1 : |\alpha|$ zu strecken. Wenn C das Gebiet $\mathfrak{G}$ umschließt, so bildet die z_α-Kurve die Grenze des Gebietes $\alpha \cdot \mathfrak{G}$. Wir wollen sie deshalb, nach Analogie der für die Gebiete eingeführten Bezeichnung, mit $\alpha \cdot C$ bezeichnen. Liegt z innerhalb $\alpha \cdot C$, also in $\alpha \cdot \mathfrak{G}$, so wird nie $\frac{z}{\zeta} = \alpha$ für alle ζ auf C. Bilden wir darum zu allen vorhandenen singulären Stellen α_j, $(j = 1, 2, 3 \ldots)$ [in der Figur sind zwei singuläre Stellen angenommen] der ξ-Ebene das zugehörige $\alpha_j \cdot \mathfrak{G}$, so kann $f(\xi)$ nur dann nicht singulär werden, wenn z auf den Durchschnitt aller $\alpha_j \cdot \mathfrak{G}$ beschränkt bleibt. Damit sind die zulässigen z bestimmt. Wir bezeichnen das Durchschnittsgebiet wieder mit Γ (in Fig. 4 schraffiert).

Jedem abgeschlossenen Gebiet Γ' innerhalb Γ entspricht auch in der ξ-Ebene ein abgeschlossenes Gebiet, so daß $f(\xi)$ regulär ist innerhalb und auf dem Rande desselben. Für alle ξ dieses Bereiches gilt der Satz von der gleichmäßigen Differenzierbarkeit analytischer Funktionen, d. h. wir können ein k und ein δ derart bestimmen, daß für $|k| < \delta$

$$\left| \frac{f(\xi + k) - f(\xi)}{k} - f'(\xi) \right| < \varepsilon$$

ist, wobei δ unabhängig ist von ξ. Folglich ist für $|h| < \varrho\,\delta$, beliebiges z aus Γ' und alle ζ auch

$$\operatorname{Max} \left| \frac{f\left(\frac{z+h}{\zeta}\right) - f\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\frac{h}{\zeta}} - f'\left(\frac{z}{\zeta}\right) \right| < \varepsilon$$

oder es existiert in jedem beliebigen Γ', d. h. also in ganz Γ

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(z+h) - J(z)}{h} = \frac{dJ(z)}{dz} = J^*(z).$$

Damit ist der Beweis gebracht, daß (10) eine analytische Funktion ist für alle z des Durchschnittes aller $\alpha_j \cdot C$. Wir erhalten demnach unter Berücksichtigung von (11) und (11′) folgenden Satz:

Satz III.

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

ist, falls C eine geschlossene, ganz im Stern von $\varphi(\zeta)$ verlaufende Kurve ist, für alle z innerhalb des Durchschnittes Γ eine analytische Funktion, die bei $z=0$ das Funktionselement $\sum a_\nu b_\nu z^\nu$ besitzt, und deren Ableitung dargestellt wird durch das Integral

$$\frac{dJ(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f'\left(\frac{z}{\zeta}\right) \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta^2}.$$

Aus diesem Satz, der das Verhalten des Integrals $J(z)$ bei fest gegebenem C beschreibt[4]), folgt als Spezialfall wieder Satz I, falls $\varphi(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta}$ gesetzt wird; andererseits folgt aber aus ihm der Hadamardsche Satz II wie folgt:

Wir wählen speziell als Kurve C im Stern von $\varphi(\zeta)$ einen Kreis mit dem Radius R. Unmittelbar vor den Schlitzen der Ebene wird der Kreis unterbrochen, und man umgeht den Schlitz und die Ecke des Sternes in einer Schleife, deren größte Entfernung von den Schlitzen gleich a ist. Der Stern von $f(\xi)$ habe die singulären Stellen α_1, α_2, der Stern von $\varphi(\zeta)$ die singulären Stellen β_1, β_2, β_3 (Fig. 5 a, b, c).

---

[4]) Das Verhalten des Integrals bei festem C ist bei Hadamard nicht angegeben.

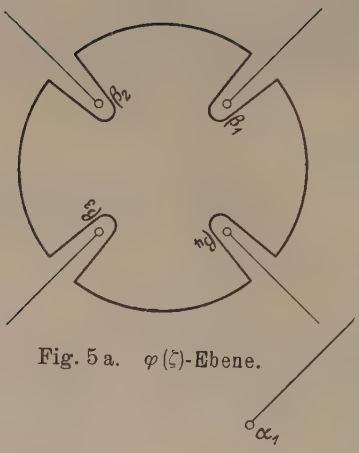

Fig. 5 a. $\varphi(\zeta)$-Ebene.

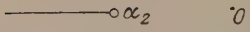

Fig. 5 b. $f(\xi)$-Ebene.

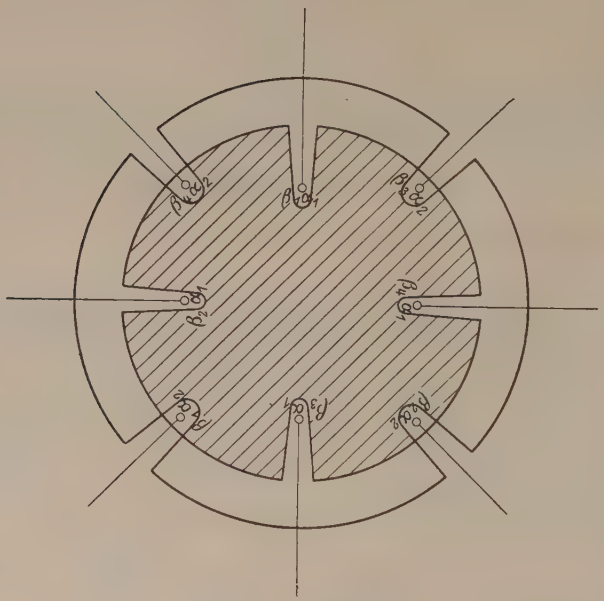

Fig. 5 c. $J(z)$-Ebene.

Die Kurve C der $\varphi(\zeta)$-Ebene wird auf die z-Ebene abgebildet. Durch Drehung um $\arg \alpha_1$ und Streckung um $|\alpha_1|$ erhalten wir $\alpha_1 \cdot C$. Der Radius des so entstandenen Kreises ist also gleich $R \cdot |\alpha_1|$. Ebenso bilden wir $\alpha_2 \cdot C$. So erhalten wir das Durchschnittsgebiet Γ, das mit dem Innern des kleinsten Kreises zusammenfällt abgesehen von Aussparungen um die Punkte $\alpha \cdot \beta$. (Das Durchschnittsgebiet Γ ist in Fig. 5c schraffiert.)

Wählen wir nun R beliebig groß, die Abstände a von den Schlitzen sehr klein, so daß das Innere von C dem Stern von $\varphi(\zeta)$ beliebig nahekommt, so können wir auf diese Weise jeden Punkt des Sternes mit den Ecken $\alpha\,\beta$ in Γ hineinbringen. Unser Integral

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{\varphi(\zeta)}{\varrho}\, d\zeta$$

stellt dann eine für alle z im Mittag-Lefflerschen Stern mit den Ecken $\alpha\,\beta$ reguläre analytische Funktion dar. Da wir für $J(z)$ die Entwicklung

$$J(z) = \sum a_\nu b_\nu z^\nu$$

gefunden hatten, ist hiermit Satz II bewiesen. $J(z)$ hat keine anderen Singularitäten als höchstens die, welche man erhält, wenn man alle Singularitäten α der Potenzreihe

$$f(z) = \sum a_\nu z^\nu$$

mit allen Singularitäten β der zweiten Potenzeihe

$$\varphi(z) = \sum b_\nu z^\nu$$

multipliziert.

Ist insbesondere $f(z)$ oder $\varphi(z)$ eine ganze Funktion (die einzige singuläre Stelle liegt dann bei ∞), so ist auch $J(z)$ eine ganze Funktion.

§ 3.

Zusammenhang der Integraldarstellung (2) mit den Summierungsverfahren. Einordnung der Perronschen Summationsverfahren.

Es sei nun eine Funktion

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \varphi_\nu(\lambda)\, \zeta^\nu \tag{12}$$

gegeben, die für jedes positive reelle λ, das auf ganzzahlige Werte beschränkt werden soll, eine ganze rationale oder transzendente Funktion von ζ ist, und zwar sei sie so definiert, daß gleichmäßig für alle ζ in und auf einem den Voraussetzungen von § 1 genügenden C

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta} \tag{13}$$

ist. Dann gilt für alle z in Γ, da man Integration und Grenzübergang wegen der Gleichmäßigkeit vertauschen darf,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\zeta} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \Phi(\lambda, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{14}$$

Nach Satz II ist also für alle z in Γ

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \varphi_\nu(\lambda)\, z^\nu\,.\ ^{5}) \tag{15}$$

Wir wollen noch zeigen, daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi_\nu(\lambda) = 1$$

ist. Durch gliedweisen Grenzübergang ergibt sich dann aus:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \varphi_\nu(\lambda)\, z^\nu\,;$$

---

[5]) Wegen Eigenschaften dieser Verfahren vgl. Perron, Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Zeitschr. 6, 1920; Perron, Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation, Math. Zeitschr. 18, 1923.

das für $|z| < r$ gültige

$$f(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu . \tag{15'}$$

Um zu zeigen, daß $\varphi_\nu(\lambda)$ bei wachsendem λ und festem ν wirklich gegen 1 strebt, setzen wir in $\Phi(\lambda, \zeta)$ einen festen Wert λ_0 ein und lassen λ über λ_0 wachsen. Setzen wir $\lambda = \lambda_0 + \mu$, so können wir schreiben:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_0+\mu,\zeta) &= \Phi(\lambda_0,\zeta)\\ &\quad + \Phi(\lambda_0+1,\zeta) - \Phi(\lambda_0,\zeta)\\ &\quad + \Phi(\lambda_0+2,\zeta) - \Phi(\lambda_0+1,\zeta)\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad + \Phi(\lambda_0+\mu,\zeta) - \Phi(\lambda_0+\mu-1,\zeta)\\ &= \Phi(\lambda_0,\zeta) + \sum_1^\mu [\Phi(\lambda_0+\varkappa,\zeta) - \Phi(\lambda_0+\varkappa-1,\zeta)].\end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (13)

$$\Phi(\lambda_0,\zeta) + \sum_1^\infty [\Phi(\lambda_0+\varkappa,\zeta) - \Phi(\lambda_0+\varkappa-1,\zeta)] = \sum_0^\infty \zeta^\nu = \frac{1}{1-\zeta}.$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\frac{1}{1-\zeta} = \sum_0^\infty \varphi_\nu(\lambda_0)\zeta^\nu + \sum_0^\infty \varkappa \left\{ \sum_0^\infty \nu [\varphi_\nu(\lambda_0+\varkappa) - \varphi_\nu(\lambda_0+\varkappa-1)]\zeta^\nu \right\}.$$

Da nach Voraussetzung die Reihe gleichmäßig konvergiert für alle ζ innerhalb und auf C, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem Kreis mit dem Radius ϱ, der ganz im Innern liegt. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz dürfen wir daher die Summationen vertauschen.

Daher ist:

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \zeta^\nu &= \sum_0^\infty \varphi_\nu(\lambda_0)\zeta^\nu + \sum_0^\infty \nu \left\{ \sum_1^\infty \varkappa \left[\varphi_\nu(\lambda_0+\varkappa) - \varphi_\nu(\lambda_0+\varkappa-1) \right] \right\} \zeta^\nu\\ &= \sum_0^\infty \nu \left\{ \varphi_\nu(\lambda_0) + \sum_1^\infty \varkappa \left[\varphi_\nu(\lambda_0+\varkappa) - \varphi_\nu(\lambda_0+\varkappa-1) \right] \right\} \zeta^\nu .\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleichung auf der rechten und linken Seite folgt:

$$1 = \varphi_\nu(\lambda_0) + \sum_0^\infty [\varphi_\nu(\lambda_0 + \varkappa) - \varphi_\nu(\lambda_0 + \varkappa - 1)]$$

$$= \lim_{\mu \to \infty} \left\{ \varphi_\nu(\lambda_0) + \sum_1^\mu [\varphi_\nu(\lambda_0 + \varkappa) - \varphi_\nu(\lambda_0 + \varkappa - 1)] \right\}.$$

In der Klammer heben sich alle Glieder bis auf $\varphi_\nu(\lambda_0 + \mu)$ auf. Die letzte Gleichung ist nichts anders als

$$\lim_{\mu \to \infty} \varphi_\nu(\lambda_0 + \mu) = 1.$$

Da aber $\lambda_0 + \mu = \lambda$ sein soll, so ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \varphi_\nu(\lambda) = 1. \tag{16}$$

Damit ist gezeigt, daß die Formel (15′) aus (15) entsteht durch Vertauschung von Grenzübergang und Summation für die sowohl in Γ wie in $|z| < r$ gelegenen z.

Aber $\lim_{\lambda \to \infty} \sum a_\nu \varphi_\nu(\lambda) z^\nu$, der für alle z in Γ immer vorhanden und gleich $f(z)$ ist, stimmt für die z in Γ außerhalb des Konvergenzkreises nicht mehr mit dem Wert der Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ überein, da diese dann divergiert. Das Wesen der Summation von Potenzreihen bei den Verfahren, die wir aus unserer Integraldarstellung ableiten können, besteht also immer in einem Grenzprozeß, der in der Reihe $\sum a_\nu z^\nu$ durchgeführt wird. Man bildet durch Einsetzen der Faktoren $\varphi_\nu(\lambda)$ die Reihe $\sum a_\nu \varphi_\nu(\lambda) z^\nu$. Läßt man hier λ gegen Unendlich streben, so nimmt diese Reihe einen Grenzwert an, der, wie bewiesen, gleich $f(z)$ ist, und dieser Grenzwert wird der Reihe als Summe zugeordnet. Dabei sind die $\varphi_\nu(\lambda)$ nicht ganz willkürlich, sondern dadurch beschränkt, daß $\Phi(\lambda, \zeta)$ eine ganze Funktion sein soll. Es gilt demnach

Satz IV:

Geht man von der Betrachtung der Reihe

$$f(z) = \sum a_\nu z^\nu$$

über zu der Reihe $\sum a_\nu \varphi_\nu(\lambda) z^\nu$, wobei

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \varphi_\nu(\lambda) \zeta^\nu = \Phi(\lambda, \zeta)$$

eine ganze Funktion und gleichmäßig

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta}$$

sein soll in und auf der Kurve C, die den in § 1 genannten Bedingungen genügt, so ist für alle z innerhalb des bekannten Durchschnittes Γ der Grenzwert der transformierten Reihe für $\lambda \to \infty$ vorhanden und gleich $f(z)$.

Für alle z außerhalb des Durchschnittes ist jedoch nichts Allgemeines über den Grenzwert von $\sum a_\nu \varphi_\nu(\lambda) z^\nu$ auszusagen; ob Divergenz stattfindet, ist für jedes Verfahren besonders zu beweisen. Diese Fragen sollen hier nicht behandelt werden.

Perron nennt solche $\varphi_\nu(\lambda)$ eine summatorische Folge. Er definiert sie nicht mittels der $\Phi(\lambda, \zeta)$, sondern durch Eigenschaften wie (16). Diese Eigenschaften folgen für uns aus (12), (13). Gilt die Formel (15) auch für gewisse $|z| > r$, so ist für diese z das $f(z)$ nach Perron summierbar. Wir verweisen dafür auf die Perronschen Arbeiten.

Es ist nun wesentlich, daß man, statt wie Perron das $\Phi(\lambda, \zeta)$ nach Potenzen von ζ zu entwickeln, auch nach anderen Funktionen von ζ entwickeln kann. Diese Entwicklungen sind dann oft besser zu handhaben als (12). Unser Weg ist dabei folgender: wir entwickeln $\Phi(\lambda, \zeta)$ in eine gleichmäßig konvergente Reihe nach Polynomen $P_\nu(\zeta, \lambda)$. Dann ist

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{2\pi i} \int_C P_\nu(\zeta, \lambda) f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Nach Anwendung des Hadamardschen Satzes auf die unter dem Integral stehende Funktion $P_\nu(\zeta, \lambda)$ erhalten wir für $f(z)$ eine Summe transmutierter Polynome.

Es soll noch gezeigt werden, daß sich aus

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_0^\lambda \pi_\nu(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta},$$

wobei $\pi_\nu(\zeta)$ spezielle Fabersche Polynome[6]) sind, ein Verfahren herleiten läßt, das sich mit dem von Perron in Math. Zeitschrift Band 18 entwickelten identisch erweist; somit werden wir zeigen können, daß sich diese Perronschen Verfahren in unsere Integraldarstellung einordnen lassen[7]).

Perron geht aus von dem Funktionselement

$$f(x) = \sum a_\nu x^\nu$$

und bildet

$$f\left(\frac{x}{z}\right) = \sum a_\nu \left(\frac{x}{z}\right)^\nu.$$

Nun ist

$$z = \psi(t) = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t);$$

dabei soll $\psi(1) = 1$ sein; dann ist

$$\left(\frac{1}{z}\right)^\nu = \frac{t^\nu}{\left(a + t\,\mathfrak{P}(t)\right)^\nu},$$

wofür wir schreiben wollen

$$\frac{1}{z^\nu} = \sum_{\nu-1}^{\infty}{}_\varkappa \gamma_\varkappa^{(\nu)} t^{\varkappa+1}$$
$$= \gamma_{\nu-1}^{(\nu)} t^\nu + \gamma_\nu^{(\nu)} t^{\nu+1} + \gamma_{\nu+1}^{(\nu)} t^{\nu+2} + \dots$$

Daher wird

$$f\left(\frac{x}{z}\right) = \sum_0^\infty{}_\nu \left(a_\nu x^\nu \sum_{\nu-1}^{\infty}{}_\varkappa \gamma_\varkappa^{(\nu)} t^{\varkappa+1}\right) = \sum_0^\infty B_\lambda(x) t^\lambda.$$

---

[6]) Vgl. Faber, Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen 57 (1903).

[7]) Zu diesem Zwecke übertragen wir die Bezeichnungen Fabers auf die Perronsche Summationsmethode. Es entsprechen sich:

Perron		Faber
w	$\longrightarrow$	x
z	$\longrightarrow$	t

$$F(z)^{-1} \longrightarrow \psi(t) = z = \frac{a + t\,\mathfrak{P}(t)}{t}$$

Für $t=1$ ist

$$f(x)=\sum_0^\infty B_\lambda(x).$$

Die B_λ lassen sich angeben, und zwar ist

$$B_\lambda(x)=\sum_0^\lambda \gamma_{\lambda-1}^{(\varkappa)} a_\varkappa x^\varkappa .$$

Diesem gegenüber stellen wir die Entwicklung von

$$\frac{z}{z-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{z}}=\sum_0^\infty \frac{x^\nu}{z^\nu}$$

nach Faberschen Polynomen; dabei sei wieder

$$z=\frac{a+t\,\mathfrak{P}(t)}{t}.$$

$\frac{z}{z-x}$ wird entwickelt nach Polynomen $B_\lambda(x)$ und Potenzen von t; diese speziellen B_λ, in denen alle $a_\nu=1$ sind, heißen $\pi_\lambda(x)$ und es ist:

$$\pi_\lambda(x)=\sum_0^\lambda \gamma_{\lambda-1}^{(\varkappa)} x^\varkappa .$$

Da aber

$$\frac{1}{1-x}=\sum_0^\infty \pi_\nu(x)=\lim_{\lambda-\infty}\sum_0^\lambda \pi_\nu(x)=\lim_{\lambda-\infty}\Phi(\lambda,x),$$

können wir diese Entwicklung in die Integraldarstellung des § 1 einführen, und nach Anwendung des Hadamardschen Satzes erhalten wir das Perronsche Verfahren.

Wir hatten bisher vorausgesetzt, daß auf C der $\lim \Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}$ gleichmäßig existiere, und konnten daraus schließen, daß die Darstellung (15) bzw. (15′) für $f(z)$ überall da gilt, wo das Integral $f(z)$ darstellt, d. h. in dem ganzen erwähnten Durchschnittsgebiet. Da aber die Reihen (15), (15′) in Wirklichkeit gar nichts mit der Integraldarstellung zu tun haben, liegt hier offenbar noch eine unnötige Beschränkung vor. Diese wollen wir nun beseitigen.

Es konvergiere (13) gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilgebiet, das ganz innerhalb der durch 1 gehenden Kurve C' liegen soll. Dabei soll C' im übrigen die Bedingungen erfüllen, die früher der Integrationskurve auferlegt waren. Dann können wir in (14) nicht mehr über C' integrieren, wohl aber den Zusatz zu Satz I anwenden. Die Reihen (15), (15′) konvergieren also in dem zu C' gehörigen Durchschnitt Γ'. Wir brauchen uns also nur um letzteres Durchschnittsgebiet zu kümmern. Von dieser Bemerkung machen wir im folgenden stets stillschweigend Gebrauch.

In den folgenden Paragraphen sollen Entwicklungen für spezielle Typen von $\Phi(\lambda, \zeta)$ aufgestellt werden. Wir bekommen damit die üblichen Summationsverfahren und vielfache Verallgemeinerungen derselben.

Beispiele zur Summation analytischer Funktionen.

§ 4.

Verallgemeinerungen des Eulerschen Verfahrens.

Aus jeder Funktion (12) mit den dort vorausgesetzten Eigenschaften folgt:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) \Phi(\lambda, \zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{17}$$

für alle z in Γ. Jeden solchen Limes nennen wir ein Summationsverfahren. Wir sehen, daß es nur darauf ankommt, ein $\Phi(\lambda, \zeta)$ zu finden derart, daß

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1 - \zeta} \tag{18}$$

erfüllt ist. Je nach der Wahl von $\Phi(\lambda, \zeta)$, wenn es nur der Bedingung (18) genügt, ändert sich das Verfahren. Beschränken wir uns auf ganze $\Phi(\lambda, \zeta)$, so folgt aus Satz II, daß das letzte Integral in (17) selbst eine ganze Funktion ist. Diese Verfahren mit ganzen $\Phi(\lambda, \zeta)$ haben solche Vorteile, daß wir uns auf sie beschränken.

Wir geben $\Phi(\lambda, \zeta)$ zunächst folgende spezielle Gestalt:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - g(\zeta) h(\zeta)^\lambda}{1 - \zeta}; \tag{19}$$

dabei wird vorausgesetzt:

(20)
1. $g(\zeta)$ und $h(\zeta)$ sind ganze Funktionen,
2. $h(1) = g(1) = 1$,
3. λ eine positive ganze Zahl.

Unter diesen Voraussetzungen ist $\Phi(\lambda, \zeta)$ an allen Stellen eine reguläre Funktion einschließlich bei $\zeta = 1$. Wir beschränken uns auf die ζ, für die

$$|h(\zeta)| < 1 \tag{21}$$

ist. Für diese ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1 - g(\zeta) h(\zeta)^\lambda}{1 - \zeta} = \frac{1}{1 - \zeta}. \tag{22}$$

Die Integrationskurve C verläuft ganz im Innern des durch (21) bestimmten Bereiches, der selbst ganz im Stern von $\frac{1}{1-\zeta}$ liegt. C darf aber beliebig nahe der Grenzkurve des Bereiches angenähert werden. Um den Summationsbereich von $f(z)$ zu bestimmen, kommt es also nur darauf an, den Konvergenzbereich unseres $\Phi(\lambda, \zeta)$ anzugeben. Dieser wird, wenn wir nur für $h(\zeta)$ verschiedene Funktionen einsetzen, die den Voraussetzungen (20) genügen müssen, jedesmal verschiedene Gestalt haben. Somit erhalten wir dann auch jedesmal ein anderes Summationsverfahren. Es wird sich zeigen, daß wir auf diesem Wege auch zu den bekannten und gebräuchlichsten Summationsverfahren gelangen.

Es sei

I. $h(\zeta)$ eine ganze rationale Funktion.

II. $h(\zeta)$ eine ganze transzendente Funktion.

I. Wir wählen in diesem Paragraphen $h(\zeta)$ ganz rational, also allgemein:

$$h(\zeta) = A(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta - a_3)\dots(\zeta - a_n).$$

Hieraus folgt unmittelbar:

Satz V.

Hat $\Phi(\lambda, \zeta)$ die Gestalt

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - g(\zeta) h(\zeta)^\lambda}{1 - \zeta},$$

wobei $h(\zeta)$ und $g(\zeta)$ ganze rationale Funktionen sind, so gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1 - \zeta}$$

innerhalb der verallgemeinerten Lemniskate

$$|A|\,|(\zeta - a_1)|\,|(\zeta - a_2)|\dots|(\zeta - a_n)| = 1.$$

Der einfachste Fall ist

1. $h(\zeta) = A(\zeta - a_1)$.

Wegen (20) gilt (22) für

$$|h(\zeta)| < 1.$$

Wir untersuchen darum die Grenzkurve

(23) $$|h(\zeta)| = 1,$$

welche die Teile der ζ-Ebene mit $|h(\zeta)| < 1$ von denen mit $|h(\zeta)| > 1$ trennt. Unsere Aufgabe, das Konvergenzgebiet von $\Phi(\lambda, \zeta)$ zu bestimmen, läuft demnach darauf hinaus, die Abbildung des Einheitskreises der h-Ebene auf die ζ-Ebene, falls $h(\zeta)$ eine ganze rationale Funktion ist, zu untersuchen. Wir haben im einfachsten Fall

$$|A|\,|(\zeta - a_1)| = 1$$

oder

(24) $$|\zeta - a_1| = c, \quad c = \frac{1}{A};$$

d. h. dem Einheitskreis $|h| = 1$ entspricht in der ζ-Ebene ein Kreis um a_1 als Mittelpunkt mit dem Radius c. Das Summationsgebiet von $f(z)$ wird dann gebildet aus dem gemeinsamen Gebiet aller um a_j gedrehten und vergrößerten Kreise, wobei a_j alle singulären Punkte von $f(z)$ bedeuten. Der Durchschnitt Γ ist ein Kreisbogenvieleck. Das Innere desselben ist der Regularitätsbereich von $f(z)$, in welchen die Funktion analytisch fortgesetzt wird. Wichtig ist nun, daß man aus der Darstellung für $f(z)$ die Summationsformel (15) angeben kann, wenn wir die Entwicklung von $\Phi(\lambda, \zeta)$ kennen.

1. Beispiel:

Das Eulersche Verfahren.

Wir setzen

$$A = \tfrac{1}{2}, \quad a_1 = -1, \text{ dann ist}$$

$$h(\zeta) = \frac{\zeta + 1}{2}, \quad h(1) = 1.$$

Es sei

$$g(\zeta) = 1.$$

Demnach hat $\Phi(\lambda, \zeta)$ die Gestalt:

(25)
$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda}}{1 - \zeta}.$$

Es ist nach (23)

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{1+\zeta}{2}\right| = 1$$

zu untersuchen. Die Grenzkurve des Konvergenzbereiches hat die Gleichung

$$|1 + \zeta| = 2;$$

d. h. $\Phi(\lambda, \zeta)$ konvergiert für λ gegen Unendlich, wenn ζ auf das Innere des Kreises um -1 als Mittelpunkt mit dem Radius $r = 2$ beschränkt bleibt. Wir haben jetzt die Taylor-Entwicklung für $\Phi(\lambda, \zeta)$ in der Umgebung von $\zeta = -1$ anzugeben. Es ist

$$\Phi(\lambda+1,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda+1}}{1-\zeta}=\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda-1}}{2\left(1-\frac{\zeta+1}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\nu}=\sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\left\{\frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_{0}^{\nu}{}_{\varkappa}\zeta^{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}\right\}$$

$$=\sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\left\{\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(1+\binom{\nu}{1}\zeta+\binom{\nu}{2}\zeta^{2}+\ldots\binom{\nu}{\nu}\zeta^{\nu}\right)\right\}.$$

Da $\Phi(\lambda,\zeta)$ für $\lambda\to\infty$ innerhalb des angegebenen Gebietes konvergiert, und zwar, da unter den gemachten Voraussetzungen (22) erfüllt ist, absolut und gleichmäßig, so dürfen wir diese Entwicklung für $\Phi(\lambda,\zeta)$ in unsere Integraldarstellung (2) oder besser in (14) einsetzen und gliedweise integrieren. Daher ist:

$$f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C}f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\Phi(\lambda+1,\zeta)\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta}$$

$$=\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{0}^{\lambda}{}_{\nu}\left\{\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(a_0+a_1\binom{\nu}{1}z+a_2\binom{\nu}{2}z^{2}+\ldots a^{\nu}\binom{\nu}{\nu}z^{\nu}\right)\right\} \tag{26}$$

oder was dasselbe ist:

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_{0}^{\nu}{}_{\varkappa}a_{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}z^{\varkappa}. \tag{26'}$$

Das ist der Ausdruck des Eulerschen Verfahrens (nach Knopp E_1-Verfahren genannt), das auf Grund der Eulerschen Reihentransformation eingeführt wurde und so auch auf dem Wege über unsere Integraldarstellung in einfacher Weise abgeleitet werden kann. Die Darstellung (26) gilt für alle z im Durchschnitt aller $\alpha\cdot\mathfrak{B}$, wobei $\mathfrak{B}$ das Innere des Kreises um -1 mit dem Radius 2, und α alle singulären Punkte von $f(z)$ bedeuten. Das Konvergenzgebiet von $\Phi(\lambda,\zeta)$ und das daraus gebildete Durchschnittsgebiet für das Eulersche Verfahren ist in Fig. 3 veranschaulicht. Dabei sind drei singuläre Punkte für $f(z)$ vorausgesetzt.

2. Beispiel:

Das verallgemeinerte Eulersche Verfahren.

Setzen wir in (24)

$$A = \frac{1}{q},$$

q eine beliebig reelle Zahl,

$$a_1 = -(q-1),$$

so wird

$$h(\zeta) = \frac{\zeta + (q-1)}{q}; \quad h(1) = 1.$$

Wegen (23) ist ζ auf den Bereich, der durch

$$h(\zeta) = \left| \frac{\zeta + (q-1)}{q} \right| = 1$$

oder anders

$$|\zeta + (q-1)| = q$$

begrenzt wird, zu beschränken. Unser

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{\zeta + (q-1)}{q}\right)^{\lambda}}{1-\zeta} \tag{27}$$

konvergiert mit der Summe $\frac{1}{1-\zeta}$ für λ gegen Unendlich, wenn $|\zeta + (q-1)| < q$ ist, d. h. wenn ζ auf das Innere des Kreises um den Punkt $-(q-1)$ mit dem Radius q beschränkt bleibt. Ist q speziell gleich 2^p, so erhalten wir für $\Phi(\lambda, \zeta)$ folgende Entwicklung:

$$\Phi(\lambda+1, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{2^p - 1 + \zeta}{2^p}\right)^{\lambda+1}}{1-\zeta}$$

$$= \frac{1}{2^p} \sum_0^{\lambda} \left(\frac{(2^p-1)+\zeta}{2^p}\right)^{\nu} = \sum_0^{\lambda} \frac{1}{2^{p(\nu+1)}} \sum_0^{\nu} \zeta^{\varkappa} (2^p-1)^{\nu-\varkappa} \binom{\nu}{\varkappa}$$

$$= \sum_0^{\lambda} \left\{ \frac{1}{2^{p(\nu+1)}} \left[(2^p-1)^{\nu} + \binom{\nu}{1}(2^p-1)^{\nu-1}\zeta + \binom{\nu}{2}(2^p-1)^{\nu-2}\zeta^2 + \dots \right.\right.$$

$$\left.\left. \dots + \binom{\nu}{\nu}\zeta^{\nu} \right] \right\}.$$

Wir setzen diese Entwicklung von $\Phi(\lambda, \zeta)$ in unsere Integraldarstellung ein und erhalten so als Ausdruck für das verallgemeinerte Eulersche Verfahren

$$(28) \quad f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{0}^{\lambda_\nu} \left\{ \frac{1}{2^{p(\nu+1)}} \left[a_0 (2^p - 1) + a_1 (2^p - 1)^{\nu-1} \binom{\nu}{1} z + \right. \right.$$

$$\left. \left. + a_2 (2^p - 1)^{\nu-2} \binom{\nu}{2} z^2 + \ldots a_\nu \binom{\nu}{\nu} z^\nu \right] \right\}$$

oder

$$(28') \quad f(z) = \sum_{0}^{\infty_\nu} \left\{ \frac{1}{2^{p(\nu+1)}} \sum_{0}^{\nu_\varkappa} a_\varkappa (2^p - 1)^{\nu-\varkappa} \binom{\nu}{\varkappa} z^\varkappa \right\}.$$

Dieses Verfahren bezeichnet Knopp mit E_p-Verfahren. Es entsteht durch p-malige Wiederholung der Eulerschen Transformation[8]). Wie bei dem E_1-Verfahren ist das Summationsgebiet für das E_p-Verfahren wieder ein Kreisbogenpolygon. Nehmen wir p beliebig groß, so kommt der Konvergenzbereich der Halbebene, die rechts begrenzt wird von der Parallelen zur imaginären Achse durch den Punkt 1 der reellen Achse, beliebig nahe. Im Grenzfall liefert das verallgemeinerte Eulersche Verfahren dasselbe wie das Borelsche Verfahren (vgl. Beispiel 6). Das Kreisbogenpolygon des Durchschnittes geht dann über in ein „Borelsches Summationspolygon".

Als Ergebnis der beiden ersten Beispiele erhalten wir folgenden

Satz VI.

Das Eulersche Summationsverfahren stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty_\nu} \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_{0}^{\nu_\varkappa} a_\varkappa \binom{\nu}{\varkappa} z^\varkappa .$$

---

[8]) Siehe Knopp, Über das Eulersche Summierungsverfahren, Math. Zeitschr. 15 (1922); Perron, Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation, Math. Zeitschr. 18 (1923).

Es entspringt aus der speziellen Funktion

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}.$$

Ebenso entspringt das verallgemeinerte Eulersche Verfahren (E_p-Verfahren)

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^{p(\nu+1)}}\sum_{0}^{\nu}a_{\varkappa}(2^{p}-1)^{\nu-\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}z^{\varkappa}$$

aus

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta+(2^{p}-1)}{2^{p}}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}.$$

Der Summationsbereich ist ein Kreisbogenpolygon. Für 2^p kann ganz allgemein jede beliebige reelle Zahl q gesetzt werden.

Wir setzen

$$2.\quad h(\zeta)=A(\zeta-a_1)(\zeta-a_2),$$
$$\text{speziell } a_2=-a_1.$$

Es ist die Abbildung durch

$$|h(\zeta)|=|(\zeta-a_1)|\;|(\zeta+a_1)|\;|A|=1$$

oder

$$|(\zeta-a_1)|\;|(\zeta+a_1)|=c,\quad c=\frac{1}{|A|}$$

zu untersuchen. Dem Einheitskreis in der h-Ebene entspricht in der ζ-Ebene eine Lemniskate, deren konstantes Produkt von den beiden Brennpunkten $\pm a_1$ gleich c ist. Dabei sind je nach der Größe von c drei Möglichkeiten vorhanden:

1. Wir erhalten eine Lemniskate mit Doppelpunkt;
2. eine in zwei Ovale zerfallende Kurve;
3. einen einheitlichen Kurvenzug, der die Hauptachse in zwei Punkten schneidet.

Da es uns darauf ankommt, einen zusammenhängenden Bereich in der ζ-Ebene zu bekommen, der Null umschließt, so müssen wir c so wählen, daß wir eine Lemniskate der dritten Art erhalten. Wir setzen der Einfachheit wegen

$$\zeta = a_1 z$$

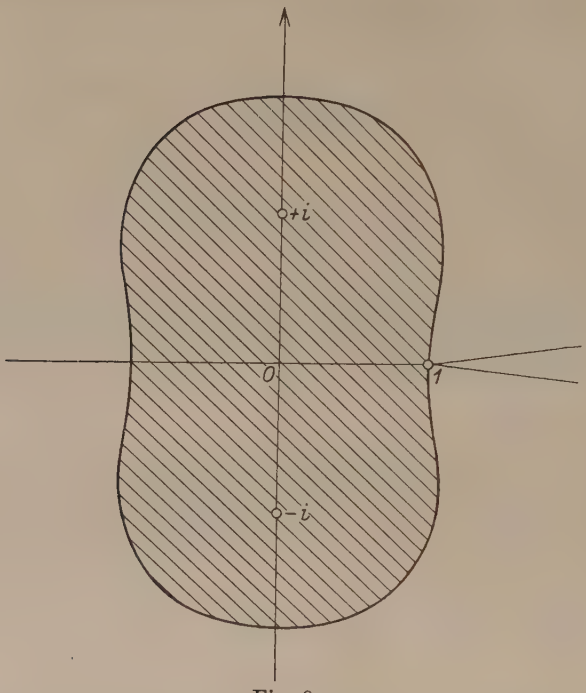

Fig 6.

und erhalten durch diese Transformation eine Lemniskate mit den Brennpunkten bei ± 1:

$$|(z-1)|\,|(z+1)| = \frac{c}{|a_1|^2} = \gamma\,.$$

Ist $\gamma > 1$, d. h. $c > |a_1|^2$, dann liegt Fall 3 vor. Wir wählen dazu folgendes

3. Beispiel:

Es sei

$$h(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta - i)(\zeta + i) = \frac{\zeta^2 + 1}{2}; \; h(1) = 1.$$

Dann ist

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right| = \tfrac{1}{2}|(\zeta - i)|\,|(\zeta + i)| = 1$$

oder

$$|(\zeta - i)|\,|(\zeta + i)| = 2;$$

da $c > |a_1|^2$ ist, so erhalten wir in der ζ-Ebene eine Lemniskate, die einen zusammenhängenden Bereich um 0 bildet. Ihre Brennpunkte liegen bei $\pm i$; außerdem geht, da $h(1) = 1$ erfüllt ist, die Lemniskate durch den Punkt 1 der reellen Achse. Die imaginäre Achse wird in den Punkten $\pm i\sqrt{3}$ geschnitten (Fig. 6).

Unser $\Phi(\lambda, \zeta)$ hat folgende Gestalt:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right)^{\lambda}}{1 - \zeta}. \tag{29}$$

Der Konvergenzbereich von $\Phi(\lambda, \zeta)$ umfaßt das Innere der Lemniskate. Unsere Integraldarstellung (2) gilt für alle z innerhalb des Durchschnittes gebildet aus allen um α gedrehten und gestreckten Lemniskaten. Wir entwickeln $\Phi(\lambda, \zeta)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda + 1, \zeta) &= \frac{1 - \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right)^{\lambda + 1}}{1 - \zeta} \\
&= \frac{1 - \frac{\zeta^2 + 1}{2}}{1 - \zeta}\left[1 + \frac{\zeta^2 + 1}{2} + \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right)^2 + \dots \right. \\
&\qquad \left. + \dots \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right)^{\lambda}\right] \\
&= \frac{1 + \zeta}{2} \sum_0^{\lambda} \left(\frac{\zeta^2 + 1}{2}\right)^{\nu}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1+\zeta}{2} \sum_0^{\lambda_\nu} \frac{1}{2^\nu} \sum_0^{\nu_\varkappa} \zeta^{2\varkappa} \binom{\nu}{\varkappa}$$

$$= \sum_0^{\lambda_\nu} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ \sum_0^{\nu_\varkappa} \binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{2\varkappa} \left(1+\zeta\right) \right\}$$

$$= \sum_0^{\lambda_\nu} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ \sum_0^{\nu_\varkappa} \left[\binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{2\varkappa} + \binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{2\varkappa+1} \right] \right\}.$$

Diese Darstellung für $\Phi(\lambda, \zeta)$ konvergiert für $\lambda \to \infty$ absolut und gleichmäßig für alle ζ innerhalb des angegebenen Konvergenzgebietes. Wir erhalten darum für $f(z)$ wegen (17) folgende Entwicklung:

$$(30) \qquad f(z) = \sum_0^{\infty_\nu} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ \sum_0^{\nu_\varkappa} \left[\binom{\nu}{\varkappa} a_{2\varkappa} z^{2\varkappa} + \binom{\nu}{\varkappa} a_{2\varkappa+1} z^{2\varkappa+1} \right] \right\}.$$

Satz VII.

Durch das aus

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{\zeta^2+1}{2}\right)^\lambda}{1-\zeta}$$

entspringende Verfahren:

$$f(z) = \sum_0^{\infty_\nu} \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_0^{\nu_\varkappa} \left[a_{2\varkappa} \binom{\nu}{\varkappa} z^{2\varkappa} + \binom{\nu}{\varkappa} a_{2\varkappa+1} z^{2\varkappa+1} \right]$$

wird $f(z)$ summiert in einem aus Lemniskatenbögen gebildeten Polygon.

Dementsprechend können wir für jede andere Lage der Lemniskate — wenn nur der Punkt 1 außerhalb oder auf ihrem Rande liegt, und wenn sie den Nullpunkt umschließt — ein anderes Summationsverfahren angeben.

Wir können

$$3. \quad h(\zeta) = A(\zeta - a_1)(\zeta - a_2) \ldots (\zeta - a_n)$$

setzen und so in Analogie zum 3. Beispiel ein $\Phi(\lambda, \zeta)$ bilden, dessen Konvergenzgebiet von einer Kurve mit beliebig vielen Fixpunkten begrenzt wird. Wir erhalten dann Lemniskaten 3., 4. ... nter Ordnung.

4. Beispiel.

Wir bilden ein Beispiel, das als Abbildung des Einheitskreises auf eine Lemniskate dritter Ordnung führt. Und zwar sollen die Brennpunkte die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden. Die Brennpunkte seien a_1, a_2, a_3.

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}, \quad a_3 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3};$$

$$h(\zeta) = \frac{\zeta^3 + 1}{2}.$$

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{\zeta^3 + 1}{2}\right| = 1;$$

$$|\zeta^3 + 1| = |(\zeta + 1)| \left|\zeta - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right| \left|\zeta - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right| = 2$$

ist die Grenzkurve. Das ist die Gleichung einer Lemniskate dritter Ordnung, die einen zusammenhängenden Bereich um Null einschließt. Da außerdem $h(1) = 1$ erfüllt ist, geht die Kurve durch den Punkt 1 der reellen Achse (Fig. 7).

In unserem Beispiel ist

$$\Phi(\lambda + 1, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{\zeta^3 + 1}{2}\right)^{\lambda + 1}}{1 - \zeta} \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \zeta + \zeta^2) \sum_0^\lambda \left(\frac{\zeta^3 + 1}{2}\right)^\nu$$

$$= \frac{1 + \zeta + \zeta^2}{2} \sum_0^\lambda \frac{1}{2^\nu} \sum_0^\nu \zeta^{3\varkappa} \binom{\nu}{\varkappa}$$

$$= \sum_0^\lambda \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ \sum_0^\nu \binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{3\varkappa} (1 + \zeta + \zeta^2) \right\}$$

oder

$$\Phi(\lambda + 1, \zeta) = \sum_0^\lambda \frac{1}{2^{\nu+1}} \left\{ \sum_0^\nu \left[\binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{3\varkappa} + \binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{3\varkappa+1} + \binom{\nu}{\varkappa} \zeta^{3\varkappa+2} \right] \right\}.$$

Wir erhalten demnach für $f(z)$ unter Berücksichtigung von (17) folgende Entwicklung:

$$(32) \qquad f(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_0^\nu \left[\binom{\nu}{\varkappa} a_{3\varkappa} z^{3\varkappa} + \binom{\nu}{\varkappa} a_{3\varkappa+1} z^{3\varkappa+1} + \right.$$
$$\left. + \binom{\nu}{\varkappa} a_{3\varkappa+2} z^{3\varkappa+2} \right].$$

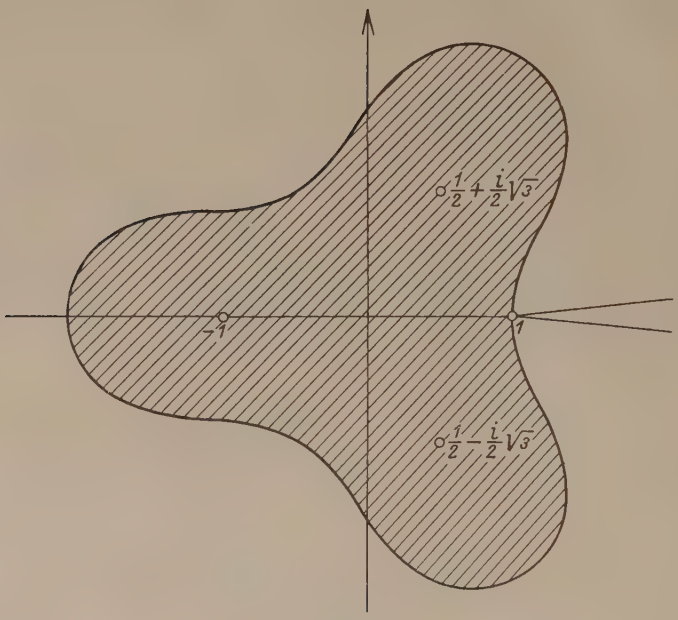

Fig. 7.

Vergleichen wir die Entwicklungen für $f(z)$ in den Beispielen 1, 3 und 4, also die Formeln (26'), (30), (32), so erkennt man eine Gesetzmäßigkeit in denselben. Es war in Beispiel 1:

$$|h(\zeta)| = \left| \frac{\zeta + 1}{2} \right| = 1;$$

der Konvergenzbereich von $\Phi(\lambda,\zeta)$ ist eine Lemniskate mit einem Brennpunkt bei -1 (Kreis); in Beispiel 3:

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{\zeta^2+1}{2}\right| = 1;$$

der Konvergenzbereich ist eine Lemniskate mit 2 Brennpunkten bei $\pm\sqrt{-1}$; in Beispiel 4:

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{\zeta^3+1}{2}\right| = 1,$$

der Konvergenzbereich ist eine Lemniskate mit 3 Brennpunkten bei $\sqrt[3]{-1}$.

Bezeichnen wir in den Entwicklungen den Ausdruck in der eckigen Klammer, der jeweils sich ändert, mit $b_\varkappa(z)$, so erhalten wir allgemein:

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_0^\nu b_\varkappa(z).$$

In Beispiel 1 ist $b_\varkappa(z) = \binom{\nu}{\varkappa} a_\varkappa z^\varkappa$,

„ „ 3 „ $b_\varkappa(z) = \binom{\nu}{\varkappa}\left(a_{2\varkappa} z^{2\varkappa} + a_{2\varkappa+1} z^{2\varkappa+1}\right)$

„ „ 4 „ $b_\varkappa(z) = \binom{\nu}{\varkappa}\left(a_{3\varkappa} z^{3\varkappa} + a_{3\varkappa+1} z^{3\varkappa+1} + \right.$

$$\left. + a_{3\varkappa+2} z^{3\varkappa+2}\right).$$

Somit sind wir in der Lage, in Analogie zu diesen Beispielen die Entwicklungen von $f(z)$ anzugeben, falls

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{\zeta^n+1}{2}\right| = 1.$$

Die Grenzkurve des Konvergenzbereiches wird eine Lemniskate nter Ordnung, deren Brennpunkte die nten Wurzeln aus der negativen Einheit sind.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in

Satz VIII:

Das aus

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta^3+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}$$

entspringende Verfahren stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z)=\sum_0^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_0^{\nu}\left\{\binom{\nu}{\varkappa}\left[a_{3\varkappa}z^{3\varkappa}+a_{3\varkappa+1}z^{3\varkappa+1}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,a_{3\varkappa+2}z^{3\varkappa+2}\right]\right\}.$$

Ebenso entspringt aus

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta^n+1}{1}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}$$

ein Verfahren von der Gestalt

$$f(z)=\sum_0^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}\sum_0^{\nu}\left\{\binom{\nu}{\varkappa}\left[a_{n\varkappa}z^{n\varkappa}+a_{n\varkappa+1}z^{n\varkappa+1}+\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots+a_{n\varkappa+n-1}z^{n\varkappa+n-1}\right]\right\}.$$

Der Summationsbereich ist in jedem Fall ein Polygon, dessen Seiten Bögen verallgemeinerter Lemniskaten (im ersten Fall von Lemniskaten dritter Ordnung, im allgemeinen Fall nter Ordnung) sind. Die Brennpunkte dieser Lemniskaten bilden die Ecken gleichseitiger Vielecke.

Wir wählen

4. die drei Brennpunkte a_1, a_2, a_3 so, daß sie auf einer Geraden liegen; es sei $a_1=0$, $a_2=-a_3$. Dann hat die Grenzkurve des Konvergenzbereiches die Gleichung

$$|h(\zeta)|=|A|\,|\zeta|\,|(\zeta-a_2)|\,|(\zeta+a_2)|=1,$$

die durch die Transformation

$$\zeta = a_2 z$$

übergeht in

$$| z | \; | (z-1) | \; | (z+1) | = \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{|A| a_2^2}.$$

Zur Konstruktion dieser Kurve zerlege man die Gleichung derselben in die beiden Gleichungen

$$| z | = \gamma_1$$

$$| (z+1) | \; | (z-1) | = \gamma_2.$$

Die erste Gleichung stellt einen Kreis dar, die zweite eine Lemniskate mit den Brennpunkten ± 1. Dabei sollen γ_1 und γ_2 die Bedingung

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma$$

erfüllen und $\gamma_2 > 1$ sein (damit die Lemniskate einen zusammenhängenden Kurvenzug darstellt). Wird γ_1 bzw. γ_2 passend gewählt, so schneiden sich Kreis und Lemniskate in vier Punkten, die Punkte unserer Kurve sind.

Auf diese Weise ist es möglich, verallgemeinerte Lemniskaten nter Ordnung zu konstruieren mittels der Lemniskate $(n-1)$ter Ordnung und des zugehörigen Kreises oder mit Hilfe einer ähnlichen Zerlegung der Kurvengleichung.

Wir wählen als Beispiel für einen solchen Konvergenzbereich:

5. Beispiel:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \left(\frac{\zeta(\zeta^2+1)}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}. \tag{33}$$

Die Grenzkurve des Konvergenzbereiches hat die Gleichung

$$|h(\zeta)| = \left|\frac{\zeta(\zeta^2+1)}{2}\right| = 1$$

oder

$$|\zeta| \; |(\zeta+i)| \; |(\zeta-i)| = 2.$$

Die Gleichung stellt eine verallgemeinerte Lemniskate dar mit den Brennpunkten 0, i, $-i$. Die imaginäre Achse ist Symmetrieachse. Da $h(1)=1$ erfüllt ist, geht diese Kurve durch 1 (Fig. 8). Innerhalb der verallgemeinerten Lemniskate ist

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}.$$

Die Entwicklung für $\Phi(\lambda,\zeta)$ ist anzugeben.

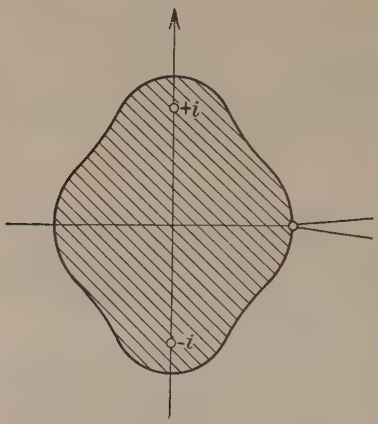

Fig. 8.

Es ist

$$\Phi(\lambda+1,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta(\zeta^2+1)}{2}\right)^{\lambda+1}}{1-\zeta}$$

$$=(\zeta^2+\zeta+2)\sum_0^{\lambda}{}_{\nu}\left\{\frac{\zeta^\nu}{2^{\nu+1}}(1+\zeta^2)^\nu\right\}$$

$$=(\zeta^2+\zeta+2)\sum_0^{\lambda}{}_{\nu}\left\{\frac{\zeta^\nu}{2^{\nu+1}}\sum_0^{\nu}{}_{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}\zeta^{2\varkappa}\right\}$$

$$=\sum_0^{\lambda}{}_{\nu}\left(\sum_0^{\nu}{}_{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}\frac{1}{2^{\nu+1}}\zeta^{2\varkappa+\nu}(\zeta^2+\zeta+2)\right)$$

$$=\sum_0^{\lambda}{}_{\nu}\sum_0^{\nu}{}_{\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}\frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\zeta^{2\varkappa+2+\nu}+\zeta^{2\varkappa+1+\nu}+2\cdot\zeta^{2\varkappa+\nu}\right).$$

Die Entwicklung konvergiert innerhalb des angegebenen Bereiches für ζ absolut und gleichmäßig, wir dürfen sie darum in unsere Integraldarstellung einsetzen; die Integrationskurve muß ganz im Innern unserer verallgemeinerten Lemniskate verlaufen. Es ist mit Bezug auf (17)

$$(34)\quad f(z)=\sum_0^\infty \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_0^\nu \varkappa \left\{ \binom{\nu}{\varkappa} \left[a_{2\varkappa+2+\nu} \cdot z^{2\varkappa+2+\nu} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + a_{2\varkappa+1+\nu} \cdot z^{2\varkappa+1+\nu} + 2\, a_{2\varkappa+\nu} \cdot z^{2\varkappa+\nu} \right] \right\}.$$

Satz IX.

Das aus

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\left(\frac{\zeta(\zeta^2+1)}{2}\right)^\lambda}{1-\zeta}$$

entspringende Verfahren stellt $f(z)$ in der Gestalt (34) dar. Das Summationsgebiet ist ein Polygon, das aus Bögen verallgemeinerter Lemniskaten entsteht; die drei Brennpunkte derselben liegen auf einer Geraden.

§ 5.
Verallgemeinerungen des Borelschen Verfahrens.

II. Wir wählen in diesem Paragraphen in

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-g(\zeta)h(\zeta)^\lambda}{1-\zeta}$$

$h(\zeta)$ ganz transzendent, und zwar beschränken wir uns auf transzendente Funktionen ohne Nullstellen.

Die allgemeinste Funktion dieser Art ist

$$h(\zeta)=e^{k(\zeta)},$$

wobei $k(\zeta)$ eine beliebige ganze Funktion bedeutet. Unser $\Phi(\lambda,\zeta)$ hat somit die Gestalt

$$(35)\qquad \Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-g(\zeta)\,e^{k(\zeta)\lambda}}{1-\zeta},$$

und da $g(\zeta)$ und $e^{k(\zeta)}$ ganze Funktionen sind, so ist $\Phi(\lambda, \zeta)$ in der ganzen Ebene einschließlich $\zeta = 1$ regulär wegen der Voraussetzung $g(1) = h(1) = 1$. Damit Voraussetzung (13) erfüllt ist, muß wie zuvor

$$|h(\zeta)| < 1$$

sein oder hier

$$|e^{k(\zeta)}| < 1.$$

Wir untersuchen wieder den Grenzfall

$$|h(\zeta)| = |e^{k(\zeta)}| = 1.$$

Nun ist aber

$$|e^{k(\zeta)}| = e^{\Re k(\zeta)} \cdot e^{\Im k(\zeta)},$$

und da

$$|e^{\Im k(\zeta)}| = 1$$

ist, so ist

$$|e^{k(\zeta)}| = e^{\Re k(\zeta)}.$$

Ist $\Re k(\zeta) < 0$, so ist $|h(\zeta)| < 1$;
ist $\Re k(\zeta) > 0$, so ist $|h(\zeta)| > 1$;
ist $\Re k(\zeta) = 0$, so ist $|h(\zeta)| = 1$.

Satz X.

Hat $\Phi(\lambda, \zeta)$ die Gestalt

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - g(\zeta)\, e^{k(\zeta)\lambda}}{1 - \zeta},$$

wobei $k(\zeta)$ eine ganze Funktion ist, so gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1 - \zeta}$$

im Innern der Kurve

$$\Re k(\zeta) = 0.$$

Die Konvergenzgrenze ist also Niveaukurve einer Potentialfunktion.

Wir beschränken uns für Beispiele auf den einfachsten Fall, daß $k(\zeta)$ eine rationale Funktion ist, und betrachten auch hier nur die einfach zu untersuchenden Fälle.

Es sei

$$1. \quad k(\zeta) = a\zeta + b$$

$$\Re k(\zeta) = \Re(a\zeta + b) = 0$$

oder

$$\Re(\zeta) = -\frac{b}{a}.$$

Das bedeutet geometrisch, daß ζ auf den Teil der Ebene, der rechts begrenzt wird von der Parallelen zur imaginären Achse durch den Punkt $x = -\frac{b}{a}$ der reellen Achse, beschränkt werden muß. Da für $h(\zeta)$ stets noch die Bedingung $h(1) = 1$ erfüllt sein muß, so unterliegen die a und b der linearen Gleichung der Bedingung

$$a = -b.$$

Demnach ist

$$x = -\frac{b}{a} = 1$$

(Fig. 9). Für alle ζ in der schraffierten Halbebene ist $|h(\zeta)| < 1$

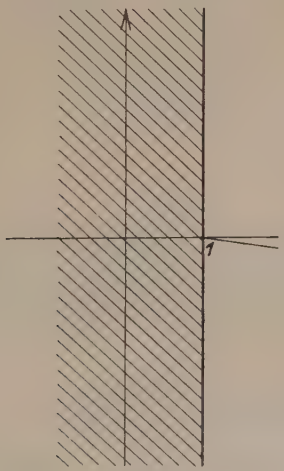

Fig. 9.

erfüllt, während in dem rechten Teil der Ebene

$$|h(\zeta)| > 1$$

ist. Ist speziell noch $a=1$, also $b=-1$, so entsteht hieraus als

6. Beispiel:

Das Borelsche Verfahren.

Wir setzen

$$g(\zeta)=\zeta, \qquad g(1)=1,$$
$$h(\zeta)=e^{k(\zeta)}, \qquad k(\zeta)=\zeta-1, \quad h(1)=1;$$

demnach ist

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\zeta e^{(\zeta-1)\lambda}}{1-\zeta}. \tag{36}$$

Nach Satz X ist ζ durch die Gleichung

$$\Re(\zeta-1)=0,$$

also auf die in Fig. 9 angedeutete Halbebene, beschränkt. Es ist

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda,\zeta)&=\frac{1-\zeta e^{\lambda(\zeta-1)}}{1-\zeta}=\frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-\zeta e^{\lambda\zeta})}{1-\zeta}\\&=\frac{e^{-\lambda}\left(\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}-\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\zeta^{\nu+1}\lambda^\nu}{\nu!}\right)}{1-\zeta}\\&=e^{-\lambda}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}\frac{1-\zeta^{\nu+1}}{1-\zeta}\\&=e^{-\lambda}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}(1+\zeta+\zeta^2+\ldots\zeta^\nu).\end{aligned}$$

Das ist eine innerhalb des angegebenen Bereiches absolut und gleichmäßig konvergierende Entwicklung für $\Phi(\lambda,\zeta)$. Wir dürfen sie darum in unsere Integraldarstellung (17) einsetzen und erhalten:

$$f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}e^{-\lambda}\sum_0^\infty{}^{\nu}\frac{\lambda^\nu}{\nu!}\int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right)(1+\zeta+\zeta^2+\ldots\zeta^\nu)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Dabei bedeutet C eine ganz in der angegebenen Halbebene verlaufende geschlossene Kurve, die keinen Punkt mit der Geraden $\Re(\zeta)=1$ gemeinsam hat. Wegen des Hadamardschen Satzes erhalten wir weiter:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} [a_0 + a_1 z + \ldots a_\nu z^\nu]$$

oder:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} s_\nu, \tag{37}$$

wobei $s_\nu = a_0 + a_1 z + \ldots a_\nu z^\nu$ ist. Das ist der Ausdruck des Borelschen Summierungsverfahrens. Die Darstellung gilt für alle z innerhalb des Durchschnittes Γ, gebildet aus allen um α gedrehten und gestreckten Kurven C, wobei die α alle singulären Punkte von $f(z)$ bedeuten. Wir können für C einen Halbkreis mit unendlich großem Radius wählen, so daß das Innere von C die ganze

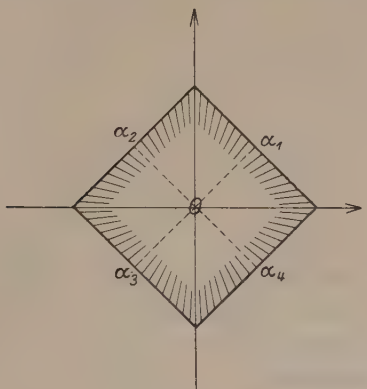

Fig. 10.

Halbebene links der Geraden $\Re(\zeta) = 1$ erfüllt. Der Durchschnitt Γ ist dann ein Polygon. Es sei α_1 ein singulärer Punkt von $f(z)$. Wir drehen die Halbebene um α_1, indem wir α_1 mit dem Anfangspunkt verbinden und auf $0\alpha_1$ das Lot errichten. So läßt sich für jeden singulären Punkt α_j $(j = 1, 2 \ldots)$ eine Grenzgerade konstruieren, die in ihrer Gesamtheit das „Borelsche Summationspolygon" bilden[9]) (Fig. 10).

Über das Verhalten in den Randpunkten sagt das Borelsche Verfahren nichts aus. Je nach Lage, Anzahl und Verteilung

[9]) vgl. Borel, Séries divergentes S. 126.

der singulären Punkte ist auch die Gestalt des Summationspolygons verschieden (Fig. 11, 12). In gewissen Fällen braucht es nicht einmal geschlossen zu sein, wie Fig. 11 zeigt. Oder die Funktion hat unendlich viele singuläre Punkte, die auf einer Kurve liegen. Das Summationspolygon ist dann ein Polygon mit unendlich vielen Seiten. Ist z. B. ein Funktionselement nicht über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar, d. h. bildet der

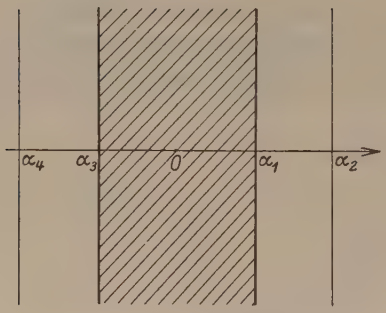

Fig. 11.

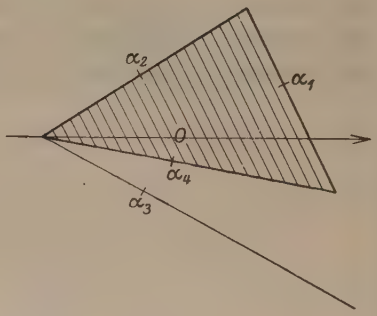

Fig. 12.

Konvergenzkreis eine singuläre Linie, so fällt das Summationspolygon mit dem Kreis zusammen als der Einhüllenden seiner sämtlichen Tangenten.

Wir fassen zusammen:

Satz XI.

Das Borelsche Summationsverfahren stellt $f(z)$ dar in der Gestalt:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} s_\nu .$$

Es entspringt aus der speziellen Funktion

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \zeta e^{(\zeta - 1)\lambda}}{1 - \zeta} .$$

Der Summationsbereich ist das „Borelsche Summationspolygon".

Es sei

$$2.\quad k(\zeta)=a\zeta^2+b\zeta+c,$$

$$\Re(\zeta)=\Re(a\zeta^2+b\zeta+c)=0,$$

dabei muß

$$a+b+c=0$$

sein.

7. Beispiel:

$$k(\zeta)=\zeta^2-1,$$

dann ist

$$h(\zeta)=e^{\zeta^2-1}; \qquad h(1)=1;$$
$$g(\zeta)=\zeta; \qquad g(1)=1.$$

Demnach ist

$$(38)\qquad \Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1-\zeta e^{(\zeta^2-1)\lambda}}{1-\zeta}.$$

Unsere Grenzkurve muß der Gleichung

$$\Re k(\zeta)=\Re(\zeta^2-1)=0$$

genügen. Nun ist ($\zeta=x+iy$)

$$\Re k(\zeta)=\Re(\zeta^2-1)=x^2-y^2-1.$$

$$x^2-y^2-1=0$$

stellt aber eine gleichseitige Hyperbel dar, deren Scheitel in ± 1 liegen. Für alle Punkte derselben ist $h(\zeta)=1$. Demnach ist in dem Gebiet zwischen den beiden Hyperbelästen $|h(\zeta)|<1$ (Fig. 13 s. S. 50).

Die Entwicklung für $\Phi(\lambda,\zeta)$ hat eine ähnliche Gestalt wie die in Beispiel 6:

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{e^{-\lambda}\left(e^{\lambda}-\zeta e^{\lambda\zeta^2}\right)}{1-\zeta}=\frac{e^{-\lambda}\sum_0^\infty{}_\nu\frac{\lambda^\nu}{\nu!}-\sum_0^\infty{}_\nu\frac{\lambda^\nu\zeta^{2\nu+1}}{\nu!}}{1-\zeta}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_0^\infty{}_\nu\frac{\lambda^\nu}{\nu!}\frac{1-\zeta^{2\nu+1}}{1-\zeta}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_0^\infty{}_\nu\frac{\lambda^\nu}{\nu!}(1+\zeta+\zeta^2+\ldots\zeta^{2\nu}).$$

Demnach wird, wenn C eine in dem angegebenen Gebiet verlaufende geschlossene Kurve bedeutet:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_C f\left(\frac{z}{\zeta}\right) (1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots \zeta^{2\nu}) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} [a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_{2\nu} z^{2\nu}]$$

oder

$$(39) \quad f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} s_{2\nu},$$

wobei

$$s_{2\nu} = a_0 + a_1 z + \ldots a_{2\nu} z^{2\nu}$$

ist.

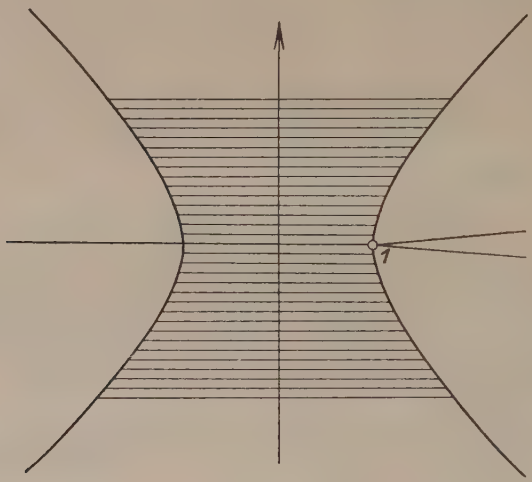

Fig. 13

Satz XII.

Das aus

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \zeta e^{(\zeta^2 - 1)\lambda}}{1 - \zeta}$$

entspringende Verfahren stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} s_{2\nu}.$$

Der Summationsbereich ist ein aus Hyperbelzweigen gebildetes Polygon.

Es läßt sich sogar allgemein der Satz beweisen:

Satz XIII.

Bei Funktionen $\Phi(\lambda, \zeta)$ der Gestalt

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \zeta e^{k(\zeta)\lambda}}{1 - \zeta},$$

wobei $k(\zeta)$ eine ganze rationale Funktion 2. Grades ist, kann kein anderer Kegelschnitt als Konvergenzgrenze auftreten als eine Hyperbel.

Der Satz läßt sich wie folgt beweisen:

Es sei $k(\zeta) = u(xy) + iv(xy)$.

Daher ist $\Re k(\zeta) = u(xy)$.

Der Realteil der analytischen Funktion genügt der Laplaceschen Differentialgleichung; demnach muß

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

erfüllt sein. Wir setzen für $k(\zeta)$ die allgemeine Kegelschnittgleichung ein. Dann ist

$$\Re k(\zeta) = u(xy) = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33}$$

Nun ist

$$u_{xx} = 2a_{11}$$
$$\underline{u_{yy} = 2a_{12}}$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 2a_{11} + 2a_{22} = 0$$
$$a_{11} + a_{22} = 0, \text{ folglich ist } a_{11} = -a_{22}.$$

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

wird darum

$$\Delta = -a_{22}^2 - a_{12}^2 < 0,$$

was ein Kriterium dafür ist, daß eine Hyperbel vorliegt.

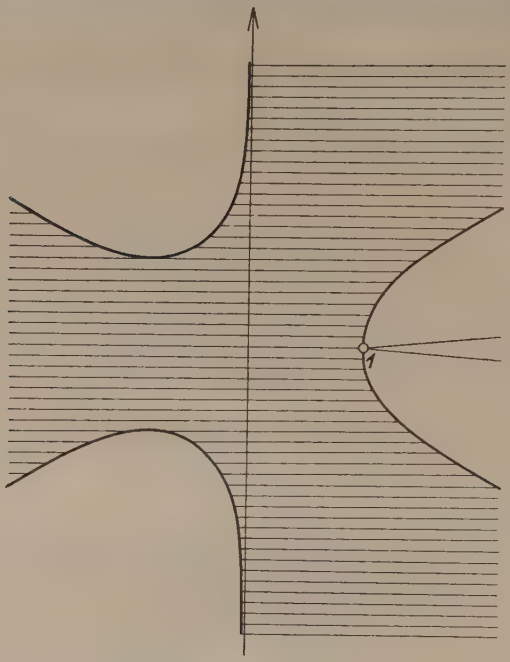

Fig. 14.

Es sei

$$3. \quad k(\zeta) = a\zeta^3 + b\zeta^2 + c\zeta + d,$$

$$\Re k(\zeta) = \Re(a\zeta^3 + b\zeta^2 + c\zeta + d) = 0,$$

dabei muß

$$a + b + c + d = 0$$

sein.

Dazu geben wir folgendes

8. Beispiel.

Es sei

$$k(\zeta) = \zeta^3 - 1;$$

dann ist

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \zeta e^{(\zeta^3-1)\lambda}}{1-\zeta}. \tag{40}$$

Die Grenzkurve des Konvergenzbereiches hat folgende Gleichung:

$$\Re(\zeta^3 - 1) = \Re[(x+iy)^3 - 1] = x^3 - 3xy^2 - 1 = 0$$

oder

$$x(x^2 - 3y^2) - 1 = 0,$$

$$x\left(x - y\sqrt{3}\right)\left(x + y\sqrt{3}\right) - 1 = 0. \tag{41}$$

Der Verlauf der Kurve ist in Fig. 14 angedeutet. Für alle Punkte der Kurve ist

$$|h(\zeta)| = \left|e^{\zeta^3-1}\right| = 1.$$

Demnach ist ζ auf den schraffierten Bereich zwischen den Kurvenzweigen zu beschränken, denn für diese ist

$$|h(\zeta)| < 1.$$

Die Integrationskurve C muß ganz innerhalb dieses Gebietes verlaufen. Die Entwicklung von $\Phi(\lambda, \zeta)$ ist anzugeben:

Es ist

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda, \zeta) &= \frac{e^{-\lambda}\left(e^{\lambda} - \zeta e^{\zeta^3 \lambda}\right)}{1-\zeta} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\sum_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\nu!} - \sum_0^\infty \frac{\zeta^{3\nu+1}\lambda^\nu}{\nu!}}{1-\zeta} \\
&= e^{-\lambda}\sum_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\nu!} - \sum_0^\infty \frac{\zeta^{3\nu+1}\lambda^\nu}{\nu!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\nu!}\,\frac{1-\zeta^{3\nu+1}}{1-\zeta}.
\end{aligned}$$

Demnach ist

$$f(z) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda}\sum_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\nu!}\left[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{3\nu} z^{3\nu}\right]$$

oder

$$(42) \qquad f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} s_{3\nu},$$

wobei

$$s_{3\nu} = a_0 + a_1 z + \ldots a_{3\nu} z^{3\nu}$$

ist. Der Grenzwert ist stets vorhanden für alle z innerhalb des Durchschnittes.

Ein Vergleich der Summationsverfahren in Beispiel 6, 7, 8, also der Formeln (37), (39), (42), läßt eine Gesetzmäßigkeit erkennen:

In Beispiel 6 ist $h(\zeta) = e^{\zeta} - 1$
„ „ 7 „ $h(\zeta) = e^{\zeta^2} - 1$
„ „ 8 „ $h(\zeta) = e^{\zeta^3} - 1$.

Die sich daraus ergebenden Entwicklungen für $f(z)$ sind bis auf den Index der in ihnen auftretenden Teilsummen gleich. Dieser lautet s_ν bzw. $s_{2\nu}$ oder $s_{3\nu}$, so daß wir analog zu diesen Beispielen das Verfahren angeben können, wenn $h(\zeta) = e^{\zeta^n} - 1$ ist. Wir fassen dieses Ergebnis zusammen in

Satz XIV.

Das aus

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \zeta e^{(\zeta^3 - 1)\lambda}}{1 - \zeta}$$

entspringende Verfahren stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} s_{3\nu}.$$

Allgemein entspringt aus

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \zeta e^{(\zeta^n - 1)}}{1 - \zeta}$$

ein Verfahren von der Gestalt

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} s_{n\nu}.$$

§ 6.

Summation durch arithmetische Mittel, Verallgemeinerungen.

Wir haben uns bisher auf gewisse einfach gebaute Funktionen $\Phi(\lambda, \zeta)$ beschränkt. Andere bekannte Summationsverfahren gehen aus etwas verwickelter gebauten Funktionen $\Phi(\lambda, \zeta)$ hervor. Zu diesen Verfahren gehört das bekannte Verfahren der Summation durch arithmetische Mittel. Um dieses zu erhalten, geben wir jetzt $\Phi(\lambda, \zeta)$ die spezielle Gestalt:

9. Beispiel.

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda}\frac{d}{d\zeta}\frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta}.$$

Dafür können wir auch schreiben:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda}\frac{1-\zeta^\lambda}{(1-\zeta)^2} \tag{43}$$

oder

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\left[\lambda - \zeta\frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta}\right]. \tag{43'}$$

Dabei soll wie bisher

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta}$$

sein. Das ist aber der Fall, wenn $\frac{1}{\lambda}\frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta}$ dem Werte Null zustrebt für unendlich groß werdendes λ. Daher muß $|\zeta| < 1$ sein. Denn dann ist

$$\left|\frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta}\right| \leqq \frac{1+|\zeta|^\lambda}{1-|\zeta|} < \frac{2}{1-|\zeta|}$$

und $\frac{1}{\lambda}\frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta}$ strebt gegen Null, wenn λ über alle Grenzen wächst. Wir müssen demnach ζ auf das Innere des Kreises mit dem Radius 1 beschränken. Für alle ζ des Einheitskreises ist die Voraussetzung erfüllt. Die Entwicklung von $\Phi(\lambda, \zeta)$ hat folgende Gestalt:

$$(44) \qquad \Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\left(1+\zeta+\zeta^2+\ldots\zeta^{\nu-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\frac{1-\zeta^{\nu}}{1-\zeta};$$

denn

$$\frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\left(1-\zeta^{\nu}\right)=\frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\left[(1-1)+(1-\zeta)+(1-\zeta^2)+\ldots+(1-\zeta^{\lambda})\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\left[\lambda-\zeta\frac{1-\zeta^{\lambda}}{1-\zeta}\right].$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit (43′) überein. Da die Entwicklung für $\Phi(\lambda,\zeta)$ im Einheitskreis konvergiert, und zwar in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig, so dürfen wir gliedweise integrieren, nachdem wir sie in unsere Integraldarstellung (17) eingeführt haben. Wir erhalten demnach:

$$f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\frac{1}{2\pi i}\int_{C}f\left(\frac{z}{\zeta}\right)\left(1+\zeta+\zeta^2+\ldots\zeta^{\nu-1}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

oder

$$f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\left[a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots a_{\nu-1}z^{\nu-1}\right]$$

$$(45) \qquad f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{s_0+s_1+s_2+\ldots s_{\lambda-1}}{\lambda}$$

oder

$$(45') \qquad f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda-1}{}^{\nu}s_{\nu},$$

wobei wir s_{-1} den Wert Null beilegen wollen. Das ist der Ausdruck für die Summation durch arithmetische Mittel erster Ordnung (H_1-Verfahren). Dieses Verfahren gilt für alle z des Durchschnittes aller um a gedrehten Kreise C. a sind die singulären Punkte von $f(z)$. Der Durchschnitt fällt mit dem Konvergenzkreis zusammen.

Satz XV.

Das Summationsverfahren durch arithmetische Mittel erster Ordnung stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots s_{\lambda-1}}{\lambda}.$$

Es entspringt aus der speziellen Funktion

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda} \frac{d}{d\zeta} \frac{1-\zeta^\lambda}{1-\zeta}$$

$$= \frac{1}{1-\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda} \frac{1-\zeta^\lambda}{(1-\zeta)^2}.$$

Der Summationsbereich ist der Konvergenzkreis.

Verallgemeinerungen können erhalten werden, wenn $\Phi(\lambda, \zeta)$ folgende Gestalt hat:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - \frac{h'(\zeta)}{h'(1)} h^\lambda(\zeta)}{1-\zeta} - \frac{h(\zeta)}{h'(1)} \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\zeta} \frac{1-h(\zeta)}{1-\zeta}, \tag{46}$$

dabei soll wieder $h(1) = 1$ und $h(\zeta)$ eine ganze Funktion sein. Setzen wir in (46) $h(\zeta) = \zeta$, so erhalten wir, wie sofort zu sehen ist, (43); also haben wir es jetzt mit einer Verallgemeinerung des zuletzt angegebenen Verfahrens zu tun. Führen wir in (46) die Differentiation aus, so erhalten wir:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta} - \frac{h'(\zeta)}{h'(1)} \frac{h^\lambda(\zeta)}{1-\zeta} + \frac{h(\zeta)}{h'(1)} \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda h^{\lambda-1}(\zeta) h'(\zeta)}{1-\zeta}$$

$$- \frac{h(\zeta)}{h'(1)} \frac{1}{\lambda} \frac{1-h^\lambda(\zeta)}{(1-\zeta)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\zeta} - \frac{h(\zeta)}{h'(1)} \frac{1}{\lambda} \frac{1-h^\lambda(\zeta)}{(1-\zeta)^2}.$$

Damit wieder

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta}$$

erfüllt ist, muß der Ausdruck $\frac{h(\zeta)}{h'(\zeta)}\frac{1}{\lambda}\frac{1-h^\lambda(\zeta)}{(1-\zeta)^2}$ gegen Null streben, wenn λ über alle Grenzen wächst. Das ist aber der Fall, wenn

$$|h(\zeta)| < 1;$$

denn dann ist

$$|1-h(\zeta)^\lambda| \leqq 1+|h(\zeta)^\lambda| < 2.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{(1-\zeta)^2} = \frac{1}{\gamma^2},$$

wobei γ eine endliche Zahl ist, so erhalten wir für unsern Ausdruck folgende Abschätzung:

$$\frac{h(\zeta)}{h'(1)}\frac{1}{\lambda}\frac{1-h(\zeta)^\lambda}{(1-\zeta)^2} < \frac{2}{|h'(1)|\gamma^2}\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{C}{\lambda},$$

wenn $C = \frac{2}{|h'(1)|\gamma^2}$ gesetzt wird. $\frac{C}{\lambda}$ geht aber gegen Null, wenn λ gegen Unendlich strebt. In allen Beispielen, die sich aus dieser Gestalt von $\Phi(\lambda,\zeta)$ ableiten lassen, muß ζ demnach wieder auf das Innere der Kurve

$$|h(\zeta)| = 1$$

beschränkt werden. Die Summationsbereiche werden demnach begrenzt von Bögen verallgemeinerter Lemniskaten und Hyperbeln wie in den Beispielen 1—8. Wir betrachten dazu das

10. Beispiel:

Arithmetische Mittel des Eulerschen Verfahrens.

Wir setzen

$$h(\zeta) = \frac{\zeta+1}{2}.$$

Der Konvergenzbereich wird begrenzt von dem Kreis um -1 mit dem Radius 2 (vgl. Beispiel 2).

(47) $$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{1-\zeta}-\frac{1+\zeta}{\lambda}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda}}{1-\zeta}$$

(47′) $$\Phi(\lambda+1,\zeta)=\frac{1}{(1-\zeta)\lambda}\left[\lambda+1-\frac{\zeta+1}{2}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda+1}}{1-\frac{\zeta+1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu+1}}{1-\frac{\zeta+1}{2}};$$

denn

$$\frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\left[1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu+1}\right]=\frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\left[1-\frac{\zeta+1}{2}+1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{2}+\right.$$

$$\left.+\ldots 1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda(1-\zeta)}\left[\lambda+1-\frac{\zeta+1}{2}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\lambda+1}}{1-\frac{\zeta+1}{2}}\right];$$

dieser Ausdruck stimmt aber mit (47′) überein.

Nun ist

$$\Phi(\lambda+1,\zeta)=\frac{1}{2\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\sum_{0}^{\nu}{}^{\varkappa}\frac{(\zeta+1)^{\varkappa}}{2^{\varkappa}}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}{}^{\nu}\left\{\sum_{0}^{\nu}{}^{\varkappa}\frac{1}{2^{\varkappa+1}}\left(1+\binom{\varkappa}{1}\zeta+\binom{\varkappa}{2}\zeta^{2}+\ldots\binom{\varkappa}{\varkappa}\zeta^{\varkappa}\right)\right\}.$$

Diese Entwicklung von $\Phi(\lambda, \zeta)$ konvergiert innerhalb des angegebenen Bereiches absolut und gleichmäßig. Wir dürfen sie in unsere Integraldarstellung (17) einsetzen und Integration und Summation vertauschen. Wir erhalten somit

$$(48) \qquad f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \sum_{0}^{\nu} \frac{1}{2^{\varkappa+1}} \left(a_0 + a_1 \binom{\varkappa}{1} z + a_2 \binom{\varkappa}{2} z^2 + \right.$$
$$\left. + \ldots a_\varkappa \binom{\varkappa}{\varkappa} z^\varkappa \right).$$

Diese Darstellung gilt für alle z im Durchschnitt, der mit dem des Eulerschen Verfahrens übereinstimmt. Ein Vergleich der Verfahren (48) und (28) zeigt, daß wir hier ein Verfahren gewonnen haben, das die arithmetischen Mittel einer durch Eulersches Verfahren transformierten Reihe angibt.

Satz XVI.

Die Summation durch arithmetische Mittel des Eulerschen Verfahrens stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \sum_{0}^{\lambda} \sum_{0}^{\nu} \frac{1}{2^{\varkappa+1}} \left(a_0 + a_1 \binom{\varkappa}{1} z + \right.$$
$$\left. + a_2 \binom{\varkappa}{2} z^2 + \ldots a_\varkappa \binom{\varkappa}{\varkappa} z^\varkappa \right).$$

Es entspringt aus der speziellen Funktion

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta} - \frac{1+\zeta}{\lambda} \frac{1 - \left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^\lambda}{1-\zeta}.$$

Der Summationsbereich ist das Kreisbogenpolygon des Eulerschen Verfahrens.

11. Beispiel.

Weitere Verallgemeinerungen erhalten wir, wenn $\Phi(\lambda, \zeta)$ folgende Gestalt hat:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{1-\zeta} - \frac{\zeta}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \frac{1}{\nu} \frac{1-\zeta^{\nu}}{(1-\zeta)^2}.$$

Dabei muß wieder $\frac{\zeta}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \frac{1}{\nu} \frac{1-\zeta^{\nu}}{(1-\zeta)^2}$ gegen Null streben, wenn λ über alle Grenzen wächst. Das ist der Fall für $|\zeta| < 1$.

Die Reihenentwicklung von $\Phi(\lambda, \zeta)$ erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda, \zeta) &= \lambda - \sum_{0}^{\lambda} \frac{\zeta}{\nu} \frac{1-\zeta^{\nu}}{1-\zeta} \frac{1}{(1-\zeta)\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \left[\frac{1}{1-\zeta} - \frac{\zeta}{\nu} \frac{1-\zeta^{\nu}}{(1-\zeta)^2} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \left[\frac{1}{\nu(1-\zeta)} \left(\nu - \zeta \frac{1-\zeta^{\nu}}{1-\zeta} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \frac{1}{\nu} \sum_{0}^{\nu} \frac{1-\zeta^{\varkappa}}{1-\zeta}.
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Entwicklung in unsere Integraldarstellung ein, so erhalten wir:

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \frac{1}{\nu} \sum_{0}^{\nu} \left[a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_{\varkappa - 1} z^{\varkappa - 1} \right]$$

$$(49) \qquad f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \frac{1}{\nu} \sum_{0}^{\nu - 1} s_{\varkappa}.$$

Wir sehen, daß wir auf diesem Wege die arithmetischen Mittel zweiter Ordnung erhalten.

Satz XVII.

Das Summationsverfahren der arithmetischen Mittel zweiter Ordnung stellt $f(z)$ dar in der Gestalt

$$f(z) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda} \frac{1}{\nu} \frac{1-\zeta^{\nu}}{(1-\zeta)^2}.$$

Der Summationsbereich ist der Konvergenzkreis.

Wir können die arithmetischen Mittel auch aus einer anderen Gestalt von $\Phi(\lambda, \zeta)$ herleiten.

Es sei allgemein

$$\Phi(\lambda,\zeta) = \frac{1 - \frac{\sum_0^{\lambda_\nu} b_\nu \cdot \varphi_\nu(\zeta)}{\sum_0^{\lambda} b_\nu}}{1-\zeta}; \tag{50}$$

dabei soll

$$|\varphi_\nu(\zeta)| < 1, \quad \varphi_\nu(1) = 1$$

sein und $\varphi_\nu(\zeta)$ eine ganze Funktion bedeuten. Ferner soll $\sum_0^{\lambda_\nu} b_\nu$ mit λ über alle Grenzen wachsen. $\sum_0^{\lambda} b_\nu \cdot \varphi_\nu(\zeta)$ konvergiere in einer gewissen Umgebung von $\zeta = 0$. Dann ist in dieser Umgebung von $\zeta = 0$ unsere Forderung

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi(\lambda,\zeta) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1 - \frac{\sum b_\nu \cdot \varphi_\nu(\zeta)}{\sum b_\nu}}{1-\zeta} = \frac{1}{1-\zeta} \tag{51}$$

erfüllt. Für (50) können wir auch schreiben:

$$\Phi(\lambda,\zeta) = \frac{\sum b_\nu - \sum b_\nu \varphi_\nu(\zeta)}{(1-\zeta)\sum b_\nu}$$

$$\Phi(\lambda,\zeta) = \frac{1}{\sum_0^{\lambda} b_\nu} \sum_0^{\lambda_\nu} b_\nu \frac{1-\varphi_\nu(\zeta)}{1-\zeta}. \tag{50'}$$

Wir beschränken uns auf den Fall

$$\varphi_\nu(\zeta) = [\varphi(\zeta)]^\nu.$$

12. Beispiel.

Arithmetische Mittel erster Ordnung.

Wir setzen in (50')

$$\sum_0^{\lambda_\nu} b_\nu = \lambda, \text{ alle } b_\nu = 1,$$
$$\varphi_{\nu_i}(\zeta) = \zeta^\nu, \quad \varphi_\nu(1) = 1,$$

so wird

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda_\nu} \frac{1-\zeta^\nu}{1-\zeta} \tag{52}$$
$$= \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda_\nu} (1+\zeta+\zeta^2+\ldots\zeta^{\nu-1}).$$

Für $|\zeta| < 1$ konvergiert diese Entwicklung gleichmäßig, und wir erhalten wie in Beispiel 9

$$f(z) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda_\nu} (a_0 + a_1 z + \ldots a_{\nu-1} z^{\nu-1})$$

oder

$$f(z) = \lim \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda_\nu - 1} s_\nu. \tag{53}$$

Satz XVIII.

Das Summationsverfahren der arithmetischen Mittel erster Ordnung entspringt auch aus der Funktion:

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda_\nu} \frac{1-\zeta^\nu}{1-\zeta}.$$

Vergleiche Satz XV.

13. Beispiel.

Arithmetische Mittel des Eulerschen Verfahrens.

Setzen wir in (50′)

$$\sum_0^{\lambda_\nu} b_\nu = \lambda, \text{ alle } b_\nu = 1,$$
$$\varphi_\nu(\zeta) = \left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu+1}, \quad \varphi_\nu(1) = 1,$$

so wird

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu+1}}{1-\zeta}.$$

Dabei soll ζ auf das Innere des Bereiches $|\varphi(\zeta)|=1$, d. h. auf den Kreis $|\zeta+1|=2$ beschränkt bleiben. Es ist

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{2\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\left(1+\frac{\zeta+1}{2}+\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{2}+\ldots\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\left\{\sum_{0}^{\nu}\frac{1}{2^{\varkappa+1}}\left(1+\binom{\varkappa}{1}\zeta+\binom{\varkappa}{2}\zeta^{2}+\ldots\binom{\varkappa}{\varkappa}\zeta^{\varkappa}\right)\right\}.$$

Somit wird

$$(54)\qquad f(z)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\left\{\sum_{0}^{\nu}\frac{1}{2^{\varkappa+1}}\left(a_0+a_1\binom{\varkappa}{1}z+\ldots a_\varkappa\binom{\varkappa}{\varkappa}z^{\varkappa}\right)\right\}.$$

Satz XIX.

Das Summationsverfahren der arithmetischen Mittel des Eulerschen Verfahrens entspringt auch aus

$$\Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1-\left(\frac{\zeta+1}{2}\right)^{\nu+1}}{1-\zeta}.$$

Vergleiche Satz XVI.

14. Beispiel.

Arithmetische Mittel des Borelschen Verfahrens.

Wir setzen in (50′)

$$\varphi_\nu(\zeta)=e^{(\zeta-1)\nu},\quad\text{alle } b_\nu=1,$$

dann wird

$$(55)\qquad \Phi(\lambda,\zeta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{0}^{\lambda}\frac{1-e^{(\zeta-1)\nu}}{1-\zeta}.$$

Die Grenzkurve des Konvergenzgebietes genügt der Gleichung

$$|e^{\zeta-1}|=1$$

oder

$$\Re(\zeta - 1) = 0.$$

Der Bereich stimmt mit dem des Borelschen Verfahrens überein. Es ist

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda} e^{-\nu} \frac{e^{\nu} - e^{\zeta\nu}}{1-\zeta}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda} e^{-\nu} \frac{\sum_0^{\infty} \frac{\nu^{\varkappa}}{\varkappa!} - \sum_0^{\infty} \frac{\zeta^{\varkappa}\nu^{\varkappa}}{\varkappa!}}{1-\zeta}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda} e^{-\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\nu^{\varkappa}}{\varkappa!} \frac{1-\zeta^{\nu}}{1-\zeta}.$$

Setzen wir diese Entwicklung für $\Phi(\lambda, \zeta)$ in unsere Integraldarstellung ein, so erhalten wir:

$$f(z) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda} \left\{ e^{-\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\nu^{\varkappa}}{\varkappa!} \left(a_0 + a_1 z + \ldots a_{\varkappa-1} z^{\varkappa-1}\right) \right\}$$

oder

$$(56) \quad f(z) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda-1} e^{-\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\nu^{\varkappa}}{\varkappa!} s_{\varkappa}.$$

Ein Vergleich der Entwicklungen (56) und (39) zeigt, daß wir in (56) ein Verfahren erhalten haben, das die arithmetischen Mittel des Borelschen Verfahrens liefert. Es gilt diese Darstellung für alle z im „Borelschen Summationspolygon".

Satz XX.

Das Summationsverfahren durch arithmetische Mittel des Borelschen Verfahrens stellt $f(z)$ dar in der Gestalt:

$$f(z) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda-1} e^{-\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\nu^{\varkappa}}{\varkappa!} s_{\varkappa}.$$

Es entspringt aus

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\lambda} \frac{1 - e^{(\zeta-1)\nu}}{1-\zeta}.$$

Ebenso können wir mit $\Phi(\lambda, \zeta)$ in der Gestalt (50) alle arithmetischen Mittel der in den Beispielen 1—9 abgeleiteten Verfahren bilden. Mithin können wir allgemein den folgenden Satz aussprechen:

Satz XXI.

Bilden wir die Summationsverfahren mit

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1 - g(\zeta)\, h(\zeta)^{\lambda}}{1 - \zeta},$$

wobei $g(1) = h(1)$ ist, und mit

$$\Phi(\lambda, \zeta) = \frac{1}{\lambda} \sum_{0}^{\lambda_{\nu}} \frac{1 - \varphi_{\nu}(\zeta)}{1 - \zeta},$$

wobei

$$\varphi_{\nu}(\zeta) = [\varphi(\zeta)]^{\nu}$$

und

$$\varphi(\zeta) = h(\zeta)$$

sein soll, so stellen letztere die arithmetischen Mittel der ersten dar. Die Summationsbereiche beider Verfahren sind dieselben.

Literaturverzeichnis.

Borel, Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 2. Aufl. Berlin 1924.

Knopp, Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen. Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung 32, 1923.

Knopp, Über das Eulersche Summationsverfahren. Math. Zeitschr. 15, 18, 1922/23.

Hadamard, La Série de Taylor. Paris 1901.

Faber, Bemerkungen zu einem funktionentheoretischen Satz des Herrn Hadamard. Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung 16, 1907.

Perron, Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Math. Zeitschr. 6, 1920.

Perron, Über eine Verallgemeinerung der Eulerschen Reihentransformation. Math. Zeitschr. 18, 1923.

Lebenslauf.

Am 8. Januar 1899 wurde ich, Amalie Klawitter, in Steele (Ruhr) als Tochter des Architekten Max Klawitter geboren. Nach Absolvierung des Lyzeums meiner Vaterstadt besuchte ich das Oberlyzeum zu Gelsenkirchen. Ostern 1919 erhielt ich das Reifezeugnis des Oberlyzeums, 1920 das Zeugnis der Lehrbefähigung für Lyzeen, 1921 das Reifezeugnis eines Realgymnasiums. Ich studierte danach Mathematik und Naturwissenschaften zuerst 2 Semester in Münster, dann 2 Semester in München und zuletzt wieder 6 Semester in Münster.